

UNIVERSITE DE GENEVE
SECTION DE MATHEMATIQUES

FACULTE DES SCIENCES
Professeur A. HAEFLIGER

COVARIANTS DE GROUPES ALGEBRIQUES REDUCTIFS

T H E S E

Présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Genève
pour obtenir le grade :

de Docteur ès Sciences, mention mathématiques

par

Thierry VUST

de

BOUDRY

THESE No 1671

GENEVE

Imprimerie Section de Physique

1 9 7 4

UNIVERSITE DE GENEVE
SECTION DE MATHEMATIQUES

FACULTE DES SCIENCES
Professeur A. HAEFLIGER

COVARIANTS DE GROUPES ALGEBRIQUES REDUCTIFS

T H E S E

Présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Genève
pour obtenir le grade :

de Docteur ès Sciences, mention mathématiques

par

Thierry VUST

de

BOUDRY

THESE No 1671

GENEVE

Imprimerie Section de Physique

1 9 7 4

La faculté des sciences, sur le préavis du professeur ordinaire A. HAEFLIGER, directeur de thèse et d'une Commission composée du professeur ordinaire C. WEBER (Faculté des Sciences) et du professeur J.L. KOSZUL (Université de Grenoble).

Genève, le 11 juillet 1974

Le Doyen

Jean MULLER

Thèse No 1671

COVARIANTS DE GROUPES ALGEBRIQUES REDUCTIFS

Introduction.

Soit G un groupe algébrique réductif et M un G -module rationnel de dimension finie, le corps de base k étant algébriquement clos et de caractéristique nulle. Ce travail est une contribution à l'étude de la structure de G -module de l'algèbre $k[M]$ des fonctions polynomiales sur M , ou à ce qu'on appelle classiquement la théorie des invariants et covariants.

Dans le cas où G est égal à $SL(n)$ (et principalement lorsque $n = 2$), la théorie des invariants et covariants fut l'objet de nombreux travaux dans la deuxième moitié du XIX^e siècle; c'est à ce propos par exemple, que D.Hilbert a démontré son "Basissatz". Plus tard H.Weyl reprend cette étude et expose dans son livre "the classical groups" (1938) la théorie des invariants pour les représentations usuelles des groupes classiques. Enfin en 1963, B.Kostant donne une description complète de la structure de G -module de $k[M]$ lorsque M est l'algèbre de Lie de G et G opère dans M par la représentation adjointe.

Soit N un G -module rationnel de dimension finie; un covariant (ou morphisme équivariant) de M à valeurs dans N est un morphisme (de variétés algébriques affines) $\gamma : M \rightarrow N$ qui commute aux opérations de G dans M et N , c'est-à-dire tel que $\gamma(s.x) = s.\gamma(x)$, $s \in G$, $x \in M$. L'étude du G -module $k[M]$, qui est en fait l'étude de ses composantes isotypiques revient à celle des covariants de M . En effet, l'ensemble des covariants de M à valeurs dans N est canoniquement isomorphe à $\text{Hom}_G(N', k[M])$, où N' désigne le dual de N ; de l'autre côté, si N' est irréductible, la composante isotypique de type N' de $k[M]$ est canoniquement isomorphe à $N' \otimes \text{Hom}_G(N', k[M])$.

Soit N un espace vectoriel de dimension finie; on désigne par S l'un des groupes $SL(N)$, $O(N)$ ou $Sp(N)$ (lorsque N est de dimension paire). Au chapitre I, on considère la représentation naturelle de S dans l'espace vectoriel $E = \bigoplus^m N$ et on se propose de déterminer la sous-algèbre $k[E]^S$ de $k[E]$ formée des fonctions invariantes par S . Une description de $k[E]^S$ par générateurs et relations a été obtenue par H.Weyl par des méthodes algébriques; ici on procède par voie géométrique en décrivant la variété algébrique affine E/S définie par $k[E/S] = k[E]^S$ et le morphisme $\pi : E \rightarrow E/S$ correspondant à l'inclusion $k[E]^S \subset k[E]$.

La donnée d'un système de générateurs de la k -algèbre $k[E]^S$ revient à celle d'un homomorphisme surjectif $\psi_a : k[x_1, \dots, x_p] \rightarrow k[E]^S$; l'ensemble des relations entre ces générateurs consiste alors en



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545931_0054

un système de générateurs $(g_1, \dots, g_q)$ de l'idéal $\text{Ker}(\psi_a)$ de $k[x_1, \dots, x_p]$. A la famille $(g_1, \dots, g_q)$ on peut associer l'homomorphisme $\rho_a : k[y_1, \dots, y_q] \rightarrow k[x_1, \dots, x_p]$ défini par $\rho_a(y_i) = g_i$; notant $\mathfrak{m}_0$ l'idéal maximal de $k[y_1, \dots, y_q]$ engendré par $(y_1, \dots, y_q)$, l'idéal de $k[x_1, \dots, x_p]$ engendré par $\rho_a(\mathfrak{m}_0)$ est égal à $\text{Ker}(\psi_a)$. A l'homomorphisme ψ_a correspond une immersion fermée $\psi : E/S \rightarrow P$ où P est un espace vectoriel de dimension p (de sorte que $k[P] = k[x_1, \dots, x_p]$); l'idéal $\text{Ker}(\psi_a)$ est alors l'ensemble des fonctions polynomiales sur P dont la restriction à la sous-variété fermée $\psi(E/S)$ est identiquement nulle; de même, à ρ_a correspond un morphisme $\rho : P \rightarrow Q$ (où Q est un espace vectoriel de dimension q) tel que l'idéal de la fibre $\bar{\rho}'(0)$ est égal à $\text{Ker}(\psi_a)$, ou encore tel que la fibre $\bar{\rho}'(0)$ est égale à $\psi(E/S)$. Ainsi, une description géométrique de $k[E]^S$ consiste en la donnée de deux espaces vectoriels P et Q , d'une immersion fermée $\psi : E/S \rightarrow P$ et d'un morphisme $\rho : P \rightarrow Q$ dont la fibre $\bar{\rho}'(0)$ est égale à $\psi(E/S)$.

Dans le problème posé, il s'avère utile d'identifier $E = \bigoplus^{\mathfrak{m}} N$ avec l'espace vectoriel $\text{Hom}(M, N)$, où M est un espace vectoriel de dimension m , et d'introduire l'opération naturelle du groupe $\text{GL}(M)$ dans E . Alors le groupe $\text{GL}(M)$ opère dans $k[E]^S$ (et donc aussi dans E/S) et il est possible de choisir pour P et Q des $\text{GL}(M)$ -modules et de demander à ψ et ρ d'être des morphismes équivariants.

Dans la pratique, un candidat pour le $\text{GL}(M)$ -module P et un co-variant $\varphi : E \rightarrow P$ du $\text{GL}(M) \times S$ -module E à valeurs dans le $\text{GL}(M) \times S$ -module P (pour l'opération triviale de S) apparaît naturellement; le morphisme φ se factorise à travers $\pi : E \rightarrow E/S$ en un morphisme

équivariant $\psi : E/S \longrightarrow P$. Dans un travail antérieur consacré aux espaces homogènes symétriques de groupes réductifs, nous avons fait le pas essentiel dans la détermination de la structure de $GL(M)$ -module des algèbres $k[P]$ en question; ce sont ces résultats qui nous permettent de démontrer que ψ décrit un système de générateurs de $k[E]^S$, c'est-à-dire que ψ est une immersion fermée, et d'exhiber un $GL(M)$ -module Q et un covariant $\rho : P \longrightarrow Q$ qui en décrit l'ensemble des relations.

Soit G un groupe algébrique réductif et E un G -module rationnel de dimension finie. Les renseignements de base concernant l'opération de G dans E sont fournis d'une part par $k[E]^G$ et d'autre part par le sous-groupe d'isotropie d'un point en position générale dans E . Concernant le problème de l'isotropie, beaucoup de résultats sont connus du point de vue infinitésimal (A.G.Elashvili).

Au chapitre II, on aborde ces problèmes dans le cas où G est produit direct d'un sous-groupe réductif H de $GL(M)$ et d'un groupe S de la forme $SL(N)$, $O(N)$ ou $Sp(N)$ et où E est égal à $\text{Hom}(M, N)$. Il nous a paru qu'un cadre convenable pour exprimer une solution de ces problèmes était d'introduire la variété E/S et le morphisme $\pi : E \longrightarrow E/S$ déjà décrits au chapitre I. Par exemple, pour un point x en position générale dans E , on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow S_x \longrightarrow G_x \longrightarrow H_{\pi(x)} \longrightarrow 1$$

où S_x désigne le sous-groupe d'isotropie en x pour l'opération de S ,

Soit G un groupe algébrique réductif et M un G -module rationnel de dimension finie. On suppose que l'orbite d'un point en position générale dans M est fermée et isomorphe à l'espace homogène G/K . On note W le groupe quotient du normalisateur de K dans G par le sous-groupe K . L'application de restriction $k[M] \rightarrow k[M^K]$ induit un homomorphisme $\rho : k[M]^G \rightarrow k[M^K]^W$; plus généralement, l'application $\rho_N : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}|_{M^K}$ est un homomorphisme entre l'ensemble des covariants (pour G) de M à valeurs dans le G -module N et l'ensemble des covariants (pour W) de M^K à valeurs dans le W -module N^K . Le chapitre III traite des propriétés des homomorphismes ρ_N .

A l'heure actuelle, trois résultats de difficultés variables sont connus, à savoir 1) que ρ est un isomorphisme, 2) que ρ_N est injectif de conoyau "assez petit" et 3) que, sous-certaines hypothèses draconiennes, ρ_M est un isomorphisme. Le premier est un cas particulier d'un résultat plus général et se trouvera dans un article à paraître de D.Luna et R.W.Richardson. Une démonstration de 2) et 3) obtenue en collaboration avec D.Luna constitue l'essentiel du chapitre III ; on y donne aussi un exemple d'un G -module M tel que l'orbite d'un point en position générale est fermée et de codimension 1 dans M et tel que ρ_M n'est pas surjectif. C'est la recherche d'un tel exemple qui est à l'origine des chapitres I et II de ce travail. En effet, le stock usuel des représentations des groupes classiques a paru insuffisant; on a donc été amené à

considérer les représentations des groupes réductifs non simples, et en premier lieu celles des groupes de la forme $H \times S$ dans les espaces $\text{Hom}(M, N)$, où H est un sous-groupe réductif de $\text{GL}(M)$ et S est égal à $\text{SL}(N)$, $\text{O}(N)$ ou $\text{Sp}(N)$.

Chaque chapitre possède sa propre bibliographie.

Le chapitre III est largement indépendant des chapitres I et II.

CHAPITRE I

THEORIE DES INVARIANTS DES GROUPES CLASSIQUES

§1. Un critère de normalité.

Soit G un groupe algébrique réductif connexe opérant (morphiquement) dans une variété algébrique affine irréductible X , le corps de base étant algébriquement clos et de caractéristique nulle. Dans ce paragraphe on démontre un critère de normalité pour la variété X , critère faisant intervenir la structure de G -module de l'algèbre des fonctions régulières sur X .

0.

Le corps de base k est algébriquement clos et de caractéristique nulle.

Soit G un groupe algébrique réductif connexe et M un G -module rationnel; on notera M^G le sous-espace des éléments de M laissés fixes par G et M' le G -module dual de M . Soit X une variété algébrique affine; on notera $k[X]$ l'algèbre des fonctions régulières sur X . Enfin, si H est un sous-groupe de G , $k[G]^H$ désignera la sous-algèbre des fonctions de $k[G]$ laissées fixes par l'opération de H définie par $(s.f)(t) = f(ts)$, $s \in H$, $t \in G$, $f \in k[G]$. On a encore une structure de G -module sur $k[G]^H$: elle est donnée par $(s.f)(t) = f(s^{-1}t)$, $s \in G$, $t \in G$, $f \in k[G]^H$.

Lorsqu'on parlera de G -modules (sans autre précision), il est sous-entendu qu'il s'agit de G -modules rationnels de dimension finie.

1.

Soit G un groupe algébrique réductif connexe et X une variété algébrique affine où G opère (morphiquement). Soit M un G -module; un covariant φ de X à valeurs dans M est un morphisme $\varphi: X \rightarrow M$ commutant aux opérations de G dans X et M : $\varphi(s.x) = s. \varphi(x)$, $s \in G$, $x \in X$. Il est clair qu'on a une bijection canonique entre l'ensemble $\text{Mor}_G(X, M)$ des covariants de X à valeurs dans M et l'ensemble $\text{Hom}_G(M', k[X])$ des homomorphismes de G -modules $M' \rightarrow k[X]$. Lorsque M est irréductible, l'ensemble $\text{Mor}_G(X, M)$ est donc une interprétation géométrique de la composante isotypique de type M' du G -module $k[X]$: en fait cette composante isotypique est canoniquement isomorphe à $M' \otimes \text{Hom}_G(M', k[X])$ via l'application $x \otimes \alpha \mapsto \alpha(x)$, $x \in M'$, $\alpha \in \text{Hom}_G(M', k[X])$.

Soit B un sous-groupe de Borel de G , U son radical unipotent; en particulier U est un sous-groupe unipotent maximal de G . On rappelle que pour tout G -module irréductible M , le sous-espace M^U est de dimension 1 ; le groupe B opère donc dans M^U via un caractère ϖ : c'est le poids dominant de M relatif à B . Le poids dominant d'un G -module irréductible caractérise ce G -module. Les éléments non nuls de M^U s'appellent les vecteurs primitifs de M relatifs à U (ou B).

On note $M(\varpi)$ un G -module irréductible de poids dominant ϖ (relatif à B) . On a les isomorphismes canoniques

$$\bigoplus_{\varpi} (M(\varpi) \otimes \text{Hom}_G(M(\varpi), k[X])) \longrightarrow k[X] ,$$

$$\bigoplus_{\varpi} (M(\varpi)^U \otimes \text{Hom}_G(M(\varpi), k[X])) \longrightarrow k[X]^U ,$$

et les isomorphismes (canoniques à homothéties près)

$$M(\varpi)^U \otimes \text{Hom}_G(M(\varpi), k[X]) \longrightarrow \text{Mor}_G(X, M(\varpi))' .$$

Par transport de structure, on a une structure de k -algèbre sur l'espace vectoriel $\bigoplus_{\varpi} \text{Mor}_G(X, M(\varpi))$: si $\varphi_i \in \text{Mor}_G(X, M(\varpi_i))$, $i=1,2$, le produit de φ_1 et φ_2 est défini par la composition

$$X \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \varphi_2} M(\varpi_1) \otimes M(\varpi_2) \xrightarrow{\varphi} M(\varpi_1 + \varpi_2)$$

et dépend du choix d'un élément non nul ρ de l'espace vectoriel de dimension 1 $\text{Hom}_G(M(\varpi_1) \otimes M(\varpi_2), M(\varpi_1 + \varpi_2))$.

2.

On conserve les notations précédentes; en particulier, U désigne un sous-groupe unipotent maximal de G . Puisque le G -module $k[G]^U$ contient toutes les représentations irréductibles de G exactement une fois, l'algèbre $k[G]^U$ est de type fini engendrée par ses sous- G -modules irréductibles dont les poids dominants engendrent le monoïde des poids dominants de G . On définit une variété algébrique affine Z par $k[Z] = k[G]^U$; le groupe G opère dans Z et y possède une orbite ouverte isomorphe à l'espace homogène G/U : on note z_0 un point de cette orbite dont l'isotropie est égale à U .

Soit X une variété algébrique affine dans laquelle le groupe G opère. On a le morphisme de restriction $\phi: k[X \times Z] \rightarrow k[X \times \{z_0\}]$, d'où on déduit, faisant opérer G "diagonalement" dans $X \times Z$, un homomorphisme $\Psi: k[X \times Z]^G \rightarrow k[X \times \{z_0\}]^U$.

Proposition 1. - L'homomorphisme $\Psi: k[X \times Z]^G \rightarrow k[X \times \{z_0\}]^U$ est un
isomorphisme.

Preuve. Puisque $G.(X \times \{z_0\})$ est ouvert ^{dense} dans $X \times Z$, Ψ est injectif. On identifie ensuite $k[X]$ et $k[X \times \{z_0\}]$; cela fournit à $k[X \times \{z_0\}]$ une structure de G -module dont la restriction à U coïncide avec celle provenant de l'opération de U dans la sous-variété $X \times \{z_0\}$ de $X \times Z$. Soit alors M un sous- G -module irréductible de $k[X \times \{z_0\}]$ et N le sous- G -module de $k[Z] = k[G]^U$ isomorphe au dual de M . On vérifie facilement que $\phi(M \otimes N)$ est contenu dans M . Puisque $\dim(M \otimes N)^G = \dim M^U = 1$ et puisqu'on sait déjà que Ψ est injectif, M^U est contenu dans l'image de Ψ , ce qui prouve que Ψ est surjectif.

Corollaire. - (cf. [2]) L'algèbre $k[X]^U$ est de type fini.

(4.5)

Lemme 1. - Soit A une k -algèbre commutative intègre, K son corps des quotients et U un groupe unipotent opérant rationnellement dans A (par automorphismes de k -algèbres). Alors, le corps des quotients de A^U est égal à K^U .

Preuve. Il est évident que le corps des quotients de A^U est contenu dans K^U . Réciproquement, soit a/b un élément de K^U , $a, b \in A$. Puisque U est unipotent, le sous-espace vectoriel de A engendré par les $(s.a)_{s \in U}$ contient un élément a' non nul invariant par U ; on écrit $a' = \sum_{i=1}^n \lambda_i (s_i.a)$ et $b' = \sum_{i=1}^n \lambda_i (s_i.b)$, $\lambda_i \in k$, $s_i \in U$. Puisque $a/b = \lambda_i (s_i.a) / \lambda_i (s_i.b)$, $i=1, \dots, n$, on a aussi $a/b = a'/b'$; on en déduit que b' est invariant par U , c'est-à-dire que a/b appartient au corps des quotients de A^U , ce qui achève la démonstration.

Théorème 1. - Soit G un groupe algébrique réductif connexe opérant dans une variété algébrique affine irréductible X et U un sous-groupe unipotent maximal de G . Alors, pour que X soit normale, il faut et il suffit que $k[X]^U$ soit intégralement clos.

Preuve. La nécessité est facile (et ne dépend pas de la nature du sous-groupe U). On suppose alors que $k[X]^U$ est intégralement clos. On note $\tilde{X}$ la normalisée de X et $\varphi: \tilde{X} \rightarrow X$ le morphisme canonique; le groupe G opère dans $\tilde{X}$. On considère aussi la variété affine Z définie par $k[Z] = k[G]^U$. Le morphisme fini $\varphi \times id: \tilde{X} \times Z \rightarrow X \times Z$ induit un morphisme fini $(\tilde{X} \times Z)/G \rightarrow (X \times Z)/G$ (on fait opérer G "diagonalement" dans $\tilde{X} \times Z$ et $X \times Z$; les notations sont celles introduites plus loin au § 3 no 0). De la proposition 1 résulte donc que $k[\tilde{X}]^U$ est entier sur $k[X]^U$; or d'après le lemme 1, $k[\tilde{X}]^U$ et $k[X]^U$ ont le même corps des quotients.

l'hypothèse signifie donc que $k[\tilde{X}]^U = k[X]^U$. Maintenant, si $k[\tilde{X}]$ était distinct de $k[X]$, il existerait dans $k[\tilde{X}]$ un sous-G-module M non réduit à (0) tel que $k[\tilde{X}] = k[X] \oplus M$; mais alors $k[\tilde{X}]^U = k[X]^U \oplus M^U$, d'où la contradiction puisque M^U n'est pas réduit à (0). On a donc $k[\tilde{X}] = k[X]$, d'où la conclusion.

Pour montrer l'utilisation du critère du théorème 1, on va prouver le résultat suivant qui est déjà démontré dans [4].

Théorème 2.- Soit M un G -module irréductible et $C(M)$ l'adhérence de l'orbite d'un élément primitif de M . Alors, la variété $C(M)$ est normale.

Preuve. La variété $C(M)$ est un cône; on peut donc parler de covariants homogènes. Soit $\varphi: C(M) \rightarrow N$ un covariant à valeurs dans un G -module irréductible N . Soit B un sous-groupe de Borel de G et U son radical unipotent. On a $\varphi(C(M)^U) \subset N^U$; par conséquent, puisque la dimension de N^U est égale à 1 et puisque φ est entièrement déterminé par sa valeur en un vecteur primitif donné de M , la dimension de $\text{Mor}_G(C(M), N)$ est inférieure ou égale à 1; le covariant φ est donc nécessairement homogène. De plus, notant ϖ (resp. χ) le caractère de B décrivant l'opération de B dans $C(M)^U$ (resp. N^U) c'est-à-dire le poids dominant de M (resp. N) relatif à B , et r le degré de φ , on a $\chi(b)\varphi(x) = b.\varphi(x) = \varphi(b.x) = \varpi(b)^r \varphi(x)$ pour tout $x \in C(M)^U$ et $b \in B$, d'où $\chi = \varpi^r$ si φ n'est pas nul. Enfin, comme la restriction à $C(M)$ de l'application identique de M fournit un élément non nul de $\text{Mor}_G(C(M), M)$, la dimension de $\text{Mor}_G(C(M), N)$ est égale à 1 si le poids dominant de N est ϖ^r , $r \in \mathbb{N}$, et est égale à 0 sinon. Ainsi $k[C(M)]^U$ est une algèbre de polynômes à une indéterminée (cf. no 1), d'où la conclusion d'après le théorème 1.

§ 2. Sur certains cônes des espaces $S^2(N)$, $\Lambda^2(N)$ et $\text{Hom}(M, N)$.

Soit M et N deux espaces vectoriels de dimension finie. On désigne par F l'un des espaces vectoriels $S^2(N)$, $\Lambda^2(N)$ ou $\text{Hom}(M, N)$ et par C_p la sous-variété de F formée des éléments de rang $\leq p$ (ou de support de dimension $\leq p$ dans le cas de $\Lambda^2(N)$). Dans ce paragraphe on se propose de prouver que les variétés C_p sont normales et d'explicitier un système de générateurs de leur idéal dans l'algèbre des fonctions polynomiales sur F .

0.

On conserve les notations et conventions du paragraphe précédent.

Soit X une variété algébrique affine et $f \in k[X]$; on note X_f l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$: c'est un ouvert affine de X dont l'algèbre des fonctions régulières est le localisé $k[X]_f$ de $k[X]$ relativement à la partie multiplicative $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit N un espace vectoriel de dimension n , B un sous-groupe de Borel de $GL(N)$ et U le radical unipotent de B : identifiant $GL(N)$ avec l'ensemble des matrices inversibles $n \times n$, on peut prendre pour B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures et pour U le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale. On désigne par $\overline{\omega}_i$ le poids dominant (relatif à B) du $GL(N)$ -module $\Lambda^i N$, $i=1, \dots, n$; le poids dominant d'un $GL(N)$ -module irréductible s'écrit $\overline{\omega} = \sum_{i=1}^n a_i \overline{\omega}_i$ avec $a_i \in \mathbb{N}$ $i=1, \dots, n-1$, $a_n \in \mathbb{Z}$. On notera $M(\overline{\omega})$ un $GL(N)$ -module irréductible de poids dominant $\overline{\omega}$. On a $M(\overline{\omega}) = M(\overline{\omega}') \otimes M(a_n \overline{\omega}_n)$ avec $\overline{\omega}' = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \overline{\omega}_i$ et $M(a_n \overline{\omega}_n)$ le $GL(N)$ -module de dimension 1 associé au caractère $s \mapsto (\det(s))^{a_n}$ de $GL(N)$.

Soit M un espace vectoriel de dimension finie; on rappelle enfin

que tout $GL(M) \times GL(N)$ -module irréductible est de la forme $\text{Hom}(P, Q)$ où P (resp. Q) est un $GL(M)$ -module (resp. $GL(N)$ -module) irréductible.

1.

Soit N un espace vectoriel de dimension n . On identifie $S^2(N)$ avec l'espace vectoriel des applications linéaires $\alpha : N' \rightarrow N$ telle que $\alpha = {}^t \alpha$. Le groupe $GL(N)$ opère dans $S^2(N)$ par $\delta \cdot \alpha = \delta \alpha \delta^t, \delta \in GL(N), \alpha \in S^2(N)$. Pour $p=1, \dots, n$, on a le covariant

$$\begin{array}{ccc} \varphi'_p : S^2(N) & \xrightarrow{\quad} & S^2(\wedge^p N) \\ \alpha & \xmapsto{\quad} & \wedge^p \alpha \end{array} ;$$

par composition de φ'_p avec un élément non nul de $\text{Hom}(S^2(\wedge^p N), M(\varpi_p))$, $GL(N)$, on obtient un covariant non nul φ_p de $S^2(N)$ à valeurs dans $M(\varpi_p)$.

On désigne par C_p le cône des éléments de $S^2(N)$ de rang $\leq p$; $C_p = (\varphi'_{p+1})^{-1}(0)$ ^{ensemblement}. Il est classique que $GL(N)$ opère transitivement dans $C_p - C_{p-1}$; en particulier, et par définition même du groupe orthogonal $O(N)$, la variété $S^2(N)_{\varphi_n} = S^2(N) - C_{n-1}$ est $GL(N)$ -isomorphe à $GL(N)/O(N)$ (le covariant φ_n est en fait le déterminant usuel sur $S^2(N)$).

Remarque 1. - Soit $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ une base de N , $(\varepsilon_i)_{i=1, \dots, n}$ la base duale. Soit T le tore maximal de $GL(N)$ formé des automorphismes de N dont la matrice dans la base (e_i) est diagonale. Pour toute suite $S = (i_1 < i_2 < \dots < i_p)$ d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, on pose $e_S = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ et $\varepsilon_S = \varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p}$; on définit ensuite un élément β_S de $S^2(\wedge^p N)$ par la formule $\beta_S(\varepsilon_{S'}) = \delta_{SS'} e_S$. Les β_S sont des vecteurs propres simultanés pour l'opération de T relativement à la valeur propre

$\chi_S : \text{diag}(t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_p})^2$. On sait par ailleurs que le sous-espace de poids χ_S de $S^2(\wedge^p N)$ est de dimension 1 et appartient au sous- $GL(N)$ -module irréductible M de poids dominant ϖ_p ; ainsi les β_S appartiennent à M .

On considère enfin l'élément α de $S^2(N)$ défini par $\alpha(i) = e_i, i=1, \dots, n$;
 alors $\wedge^p \alpha = \varphi'_p(\alpha)$ est somme des β_s et par suite appartient à M .
 Comme l'orbite de α dans $S^2(N)$ est ouverte, on en déduit que
 $\varphi'_p(S^2(N))$ est contenu dans M . Par conséquent, les relations $\varphi'_p(\alpha) = 0$
 et $\varphi_p(\alpha) = 0$ sont équivalentes.

Le lemme suivant, qui n'est qu'une conséquence des résultats de [6] est crucial pour la suite.

Lemme 1.- La dimension de $\text{Mor}_{GL(N)}(S^2(N)_{\varphi_n}, M(\overline{w}))$ est égale à 1
si $\overline{w} = \sum_{i=1}^n 2a_i \overline{w}_i$ où $a_i \in \mathbb{N}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $a_n \in \mathbb{Z}$;
elle est égale à 0 sinon.

Preuve. Puisque $S^2(N)_{\varphi_n}$ est isomorphe à l'espace homogène $GL(N)/O(N)$,
 la dimension de $\text{Mor}_{GL(N)}(S^2(N)_{\varphi_n}, M(\overline{w}))$ est égale à la dimension
 de $M(\overline{w})^{O(N)}$; l'affirmation du lemme résulte donc immédiatement
 des résultats de [6] § 3 (cf. l'exemple 2).

Proposition 1.- L'algèbre $k[C_p]^U$ est une algèbre de polynômes à
 p indéterminées engendrée par les vecteurs primitifs
correspondant aux covariants $\varphi_i, 1 \leq i \leq p$.

Remarque 2.- Lorsque $p = n$, c'est-à-dire lorsque $C_p = S^2(N)$, la
 proposition signifie que la dimension de $\text{Mor}_{GL(N)}(S^2(N), M(\overline{w}))$ est
 égale à 1 si $\overline{w} = \sum_{i=1}^n 2a_i \overline{w}_i$ avec $a_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$ et est égale à 0
 sinon. Puisque les φ_i sont des morphismes homogènes de degré 1,
 on a par conséquent un $GL(N)$ -isomorphisme

$$S^r(S^2(N)) \simeq \bigoplus_{\substack{a_i \geq 0 \\ \sum i a_i = r}} M(\sum 2a_i \overline{w}_i),$$

où $S^r(S^2(N))$ désigne la composante homogène de degré r de l'algèbre
 symétrique de $S^2(N)$.

Preuve de la proposition 1. On commence par démontrer la proposition dans le cas où $p = n$, c'est-à-dire lorsque $C_p = S^2(N)$.

Pour tout $GL(N)$ -module irréductible M , le morphisme de restriction $\text{Mor}_{GL(N)}(S^2(N), M) \rightarrow \text{Mor}_{GL(N)}(S^2(N)_{\mathcal{Y}_n}, M)$ est injectif. Les covariants φ_i appartiennent à $\text{Mor}_{GL(N)}(S^2(N), M(\mathcal{Q}\overline{\mathcal{W}}_i))$; par "multiplication", on en déduit des covariants $\varphi(\overline{\mathcal{W}})$ non nuls de $S^2(N)$ à valeurs dans $M(\overline{\mathcal{W}})$ pour $\overline{\mathcal{W}} = \sum_{i=1}^n 2a_i \overline{\mathcal{W}}_i$; $a_i \in \mathbb{N}$ (cf. § 1 no 1).

Ainsi, d'après le lemme 1, l'affirmation sera démontrée dès qu'on aura prouvé qu'un covariant φ de $S^2(N)_{\mathcal{Y}_n}$ à valeurs dans $M(\overline{\mathcal{W}})$ pour $\overline{\mathcal{W}} = \sum_{i=1}^n 2a_i \overline{\mathcal{W}}_i$ avec $a_i \in \mathbb{N}$ $1 \leq i < n$, $a_n < 0$, ne se prolonge pas à $S^2(N)$. En effet, notant $\overline{\mathcal{W}}' = \sum_{i=1}^{n-1} 2a_i \overline{\mathcal{W}}_i$, on $M(\overline{\mathcal{W}}) = M(\overline{\mathcal{W}}') \otimes M(2a_n \overline{\mathcal{W}}_n)$, où $M(2a_n \overline{\mathcal{W}}_n)$ est le $GL(N)$ -module irréductible de dimension 1 décrit par le caractère $s \mapsto (\det(s))^{2a_n}$. D'après le lemme 1, le covariant $\alpha \mapsto \bigotimes_{i=1}^{n-1} \varphi_i(\alpha')$ est une base de $\text{Mor}_{GL(N)}(S^2(N)_{\mathcal{Y}_n}, M(2a_n \overline{\mathcal{W}}_n))$: on le note $\varphi(2a_n \overline{\mathcal{W}}_n)$. Comme d'après le lemme 1 encore une fois, φ est égal (à une constante multiplicative près) à $\varphi(\overline{\mathcal{W}}') \otimes \varphi(2a_n \overline{\mathcal{W}}_n)$, on voit bien que φ ne se prolonge pas à $S^2(N)$. Ceci démontre la proposition lorsque $p = n$.

Il est clair que la restriction de φ_i à C_p est (resp. n'est pas) identiquement nulle pour $i = p+1, \dots, n$ (resp. $i = 1, \dots, p$) (cf. remarque 1). D'autre part, puisque un covariant de C_p à valeurs dans $M(\overline{\mathcal{W}})$ est la restriction à C_p d'un covariant de $S^2(N)$ à valeurs dans $M(\overline{\mathcal{W}})$, le morphisme de restriction $\Psi : k[S^2(N)]^U \rightarrow k[C_p]^U$ est surjectif; son noyau étant clairement l'idéal engendré par les vecteurs primitifs correspondant aux φ_i $i = p+1, \dots, n$, la proposition 1 est démontrée.

Soit $\varphi : S^2(N) \rightarrow M$ un covariant; par idéal de $k[S^2(N)]$ engendré par φ , on entend l'idéal engendré par les $\xi \cdot \varphi$ où ξ appartient au dual de M .

Théorème 1. - La variété C_p formée des éléments de $S^2(N)$ de rang $\leq p$ est normale; son idéal dans $k[S^2(N)]$ est engendré par φ_{p+1} (ou φ'_{p+1}).

Preuve. La première assertion résulte de la proposition 1, du théorème 1 du paragraphe 1 et du fait que la variété C_p est irréductible comme étant presque homogène pour l'opération de $GL(N)$.

Comme C_p est invariant par $GL(N)$, l'idéal de C_p dans $k[S^2(N)]$ est engendré par des covariants, en premier lieu par ceux-là mêmes dont les vecteurs primitifs correspondant engendrent $\text{Ker}(\Psi)$, où Ψ désigne le morphisme de restriction $k[S^2(N)]^U \rightarrow k[C_p]^U$. Pour démontrer la seconde affirmation du théorème, il suffit donc de prouver que l'idéal de $k[S^2(N)]$ engendré par φ_{p+1} contient l'idéal engendré par φ_i , $i = p+1, \dots, n$. Or le composé

$$S^2(N) \xrightarrow{\varphi_i \otimes \varphi'_i} S^2(\wedge^i N) \otimes S^2(N) \xrightarrow{c} S^2(\wedge^{i+1} N),$$

où c est la restriction à $S^2(\wedge^i N) \otimes S^2(N)$ du morphisme canonique $\text{Hom}(\wedge^i N', \wedge^i N) \otimes \text{Hom}(N', N) \rightarrow (\otimes^2 \wedge^i N) \otimes (\otimes^2 N) \rightarrow \otimes^2 \wedge^{i+1} N \rightarrow S^2(\wedge^{i+1} N)$, est égal à φ'_{i+1} , ce qui achève la preuve de la seconde assertion (cf. remarque 1).

Soit N un espace vectoriel de dimension n . On identifie $\Lambda^2(N)$ avec l'espace vectoriel des applications linéaires $\alpha : N' \rightarrow N$ telles que $\alpha = -{}^t\alpha$. Le groupe $GL(N)$ opère dans $\Lambda^2(N)$ par $s \cdot \alpha = s \alpha s^t$, $s \in GL(N)$, $\alpha \in \Lambda^2(N)$. Pour $p = 1, \dots, [n/2]$, on a le covariant

$$\begin{array}{ccc} \psi_p : \Lambda^2(N) & \longrightarrow & \Lambda^{2p}(N) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha \wedge \dots \wedge \alpha \end{array}$$

à valeurs dans le $GL(N)$ -module irréductible de poids dominant $\overline{\omega}_{2p}$.

On désigne par C_p le cône des éléments de $\Lambda^2(N)$ de rang $\leq 2p$; $C_p = \psi_{p+1}^{-1}(0)$. Le groupe $GL(N)$ opère transitivement dans $C_p - C_{p-1}$.

Proposition 2.- L'algèbre $k[C_p]^U$ est une algèbre de polynômes à p indéterminées engendrée par les vecteurs primitifs correspondant aux covariants ψ_i , $i = 1, \dots, p$.

Preuve. (a) Lorsque $n = 2m$ est pair, le covariant ψ_m est à valeurs dans $\Lambda^m(N) \simeq k$: c'est à un facteur près le pfaffien sur $\Lambda^2(N)$. Le groupe $GL(N)$ opère transitivement dans $\Lambda^2(N)_{\psi_m} = \Lambda^2(N) - C_{m-1}$; par définition du groupe symplectique $Sp(N)$, $\Lambda^2(N)_{\psi_m}$ est $GL(N)$ -isomorphe à $GL(N)/Sp(N)$.

En suivant exactement le même schéma de démonstration qu'au numéro 1 et en utilisant cette fois l'exemple 1 du § 3 de [6], on prouve la proposition 2 lorsque $n = 2m$ est pair.

(b) Lorsque $n = 2m+1$ est impair, on considère un sous-espace M de dimension $2m$ de N ; on identifie $GL(M)$ à un sous-groupe de $GL(N)$ et $\Lambda^2(M)$ à un sous-espace de $\Lambda^2(N)$. Le stabilisateur H du sous-espace $\Lambda^2(M)$ dans $GL(N)$ contient un sous-groupe unipotent maximal U de $GL(N)$; en fait U n'opère effectivement dans $\Lambda^2(M)$ que comme sous-groupe unipotent maximal U' de $GL(M)$: en effet, dans une

base de N dont les $2m$ -premiers vecteurs engendrent M , H est de la forme

$$\begin{pmatrix} GL(M) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

On note enfin $C_p(M)$ (resp. $C_p(N)$) le cône des éléments de $\Lambda^2(M)$ (resp. $\Lambda^2(N)$) de rang $\leq 2p$; on a $GL(N).C_p(M) = C_p(N)$. Par restriction on a des homomorphismes

$$\phi : k[C_p(N)]^U \longrightarrow k[C_p(M)]^{U'} = k[C_p(M)]^U$$

dont on va montrer que ce sont des isomorphismes. De là et de la partie (a) de la preuve résultera l'affirmation de la proposition lorsque $n = 2m+1$.

Soit $f \in k[C_p(N)]^U$ et φ le covariant de $C_p(N)$ correspondant (cf. § 1 no 1). Dire que $f \in \text{Ker}(\phi)$ signifie que la restriction de φ à $C_p(M)$ est nulle; or puisque $C_p(N) = GL(N).C_p(M)$, cette condition implique que φ est nul: l'homomorphisme ϕ est donc injectif. Comme enfin la restriction (en fait les vecteurs primitifs correspondant ...) à $C_p(M)$ des covariants φ_i , $i=1, \dots, p$ de $\Lambda^2(N)$ à valeurs dans $\Lambda^{2i}(N)$ constituent un système de générateurs de $k[C_p(M)]^{U'}$ (c'est la proposition 2 dans le cas $n = 2m$), ϕ est un isomorphisme.

Théorème 2.- La variété C_p formée des éléments de $\Lambda^2(N)$ de rang $\leq 2p$ est normale; son idéal dans $k[\Lambda^2(N)]$ est engendré par φ_{p+1} .

La preuve du théorème 2 est semblable à celle du théorème 1.

3.

Soit M et N deux espaces vectoriels de dimension m et n resp.

On fait opérer le groupe $GL(M) \times GL(N)$ dans $E = \text{Hom}(M, N)$ par

$$(s, t) \cdot \alpha = t \alpha s^{-1}, \quad s \in GL(M), \quad t \in GL(N), \quad \alpha \in E. \quad \text{Pour } p = 1, \dots, \inf(m, n),$$

on a le covariant

$$\begin{array}{ccc} \gamma_p : & E & \longrightarrow \text{Hom}(\wedge^p(M), \wedge^p(N)) \\ & \alpha & \longmapsto \wedge^p \alpha \end{array}$$

On désigne par C_p le cône des éléments de E de rang $\leq p$; $C_p = \bigcup_{i=1}^p \gamma_i^{-1}(0)$ ^{ensemblement}.

Le groupe $GL(M) \times GL(N)$ opère transitivement dans $C_p - C_{p-1}$.

On désigne par U un sous-groupe unipotent maximal de $GL(M) \times GL(N)$.

Proposition 3.- L'algèbre $k[C_p]^U$ est une algèbre de polynômes à p indéterminées engendrée par les vecteurs primitifs correspondant aux covariants γ_i , $i = 1, \dots, p$.

Preuve. (a) Lorsque $n = m$, auquel cas on identifie M et N , le covariant γ_m est le déterminant usuel sur $E = \text{Hom}(M, M)$; la variété $E_{\gamma_m} = E - C_{m-1}$ est $GL(M) \times GL(M)$ -isomorphe à $GL(M) \times GL(M)/K$ où $K = \{ (s, s) \mid s \in GL(M) \}$.

Le lemme suivant est l'analogie du lemme 1 ; on en déduit comme au numéro 1 la proposition lorsque $m = n$.

Lemme 2.- Soit P et Q deux $GL(M)$ -modules irréductibles ; alors la dimension de $\text{Mor}_{GL(M) \times GL(M)}(E_{\gamma_m}, \text{Hom}(P, Q))$ est égale à 1 si P et Q sont isomorphes, elle est égale à 0 sinon.

Preuve. D'après la description de l'espace homogène E_{γ_m} donnée plus haut, la dimension de $\text{Mor}_{GL(M) \times GL(M)}(E_{\gamma_m}, \text{Hom}(P, Q))$ est égale à la dimension de $\text{Hom}(P, Q)^{GL(M)}$, d'où l'affirmation.

Remarque 4.- Puisque le sous-groupe K est l'ensemble des points fixes de l'automorphisme involutif $(s,t) \mapsto (t,s)$ de $GL(M) \times GL(M)$, le lemme 2 est aussi conséquence d'un cas particulier banal des résultats de [6].

Remarque 5.- Soit $\rho : GL(M) \rightarrow GL(P)$ la représentation décrivant la structure de $GL(M)$ -module irréductible sur P . Les covariants de E_{γ_m} à valeurs dans $\text{Hom}(P,P)$ sont les $\alpha \mapsto \alpha \rho(\alpha)$, $\alpha \in K$, $\alpha \in E_{\gamma_m}$.

(b) Lorsque $m \neq n$, $m < n$ par exemple (aux changements évidents près, le cas $m > n$ se traite de la même manière), on identifie M à un sous-espace de N , $G' = GL(M) \times GL(M)$ à un sous-groupe de $G = GL(M) \times GL(N)$ et $E' = \text{Hom}(M,M)$ à un sous-espace de $E = \text{Hom}(M,N)$. Le stabilisateur H du sous-espace E' dans G contient un sous-groupe unipotent maximal U de G ; en fait U n'opère effectivement dans E' que comme sous-groupe unipotent maximal U' de G' : en effet, dans une base de N dont les m -premiers vecteurs engendrent M , H est de la forme

$$GL(M) \times \begin{pmatrix} GL(M) & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

On note C_p (resp. C'_p) le cône des éléments de E (resp. E') de rang $\leq p$; on a $G.C'_p = C_p$. Par restriction on a des homomorphismes

$$\phi : k[C_p]^U \longrightarrow k[C'_p]^{U'} = k[C'_p]^U$$

dont on montre comme au numéro 2 que ce sont des isomorphismes.

Le cas $m \neq n$ de la proposition 3 est donc une conséquence du cas $m = n$.

Théorème 3.- La variété C_p formée des éléments de $\text{Hom}(M, N)$ de
 $\text{rang} \leq p$ est normale; son idéal dans $k[\text{Hom}(M, N)]$ est
engendré par y_{p+1} .

La preuve du théorème 3 est semblable à celle du théorème 1 .

§ 3. Sur la théorie des invariants des groupes classiques.

Soit N un espace vectoriel de dimension finie. On désigne par E le $O(N)$ -module $\hat{\oplus}^m N$, le $Sp(N)$ -module $\hat{\oplus}^m N$ (lorsque N est de dimension paire), le $GL(N)$ -module $\hat{\oplus}^p N \otimes \hat{\oplus}^q N'$ ou le $SL(N)$ -module $\hat{\oplus}^m N$.

Dans ce paragraphe on retrouve une partie des résultats de [7] chap. II et IV relatifs à l'algèbre des fonctions polynomiales ^{invariantes} sur E .

O.

Les notations et conventions sont celles des paragraphes précédents.

Soit G un groupe algébrique réductif et X une variété algébrique affine; on suppose que G opère (morphiquement) dans X . La sous-algèbre $k[X]^G$ de $k[X]$ formée des fonctions régulières sur X invariantes par G est de type fini; on définit alors une variété algébrique affine X/G par $k[X/G] = k[X]^G$ et on désigne par $\pi : X \rightarrow X/G$ le morphisme correspondant à l'inclusion $k[X]^G \subset k[X]$. Le morphisme π est surjectif et possède la propriété universelle que voici: pour toute variété algébrique affine Y et tout morphisme $\varphi : X \rightarrow Y$ tel que $\varphi(s \cdot x) = \varphi(x)$, $s \in G$, $x \in X$, il existe un unique morphisme $\psi : X/G \rightarrow Y$ tel que $\psi \cdot \pi = \varphi$. Pour plus de détails au sujet du morphisme π voir [3] chap. 1.

L'expression "un point en position générale dans X possède la propriété (P)" signifie qu'il existe un ouvert dense de X formé de points vérifiant (P).

Soit N un espace vectoriel de dimension n et f un élément de $S^2(N')$ de rang maximum (on identifie $S^2(N')$ avec l'ensemble des $\alpha \in \text{Hom}(N, N')$ tels que $\alpha = {}^t\alpha$). Le groupe $GL(N)$ opère dans $S^2(N')$; on note $O(N)$ le sous-groupe d'isotropie de f (ou de $f^{-1} \in S^2(N)$). Soit M un espace vectoriel de dimension m . On considère les $GL(M) \times O(N)$ -modules $E = \text{Hom}(M, N)$ et $S^2(M')$ ($O(N)$ opérant trivialement dans $S^2(M')$). On a alors un covariant

$$\begin{array}{ccc} \varphi : E & \longrightarrow & S^2(M') \\ \alpha & \longmapsto & {}^t\alpha \circ \alpha \end{array}$$

qui par définition de $\pi : E \rightarrow E/O(N)$ se factorise en

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \pi \swarrow & & \searrow \varphi \\ E/O(N) & \xrightarrow{\psi} & S^2(M') \end{array}$$

où ψ est un covariant de la $GL(M)$ -variété $E/O(N)$.

Théorème 1.- Le morphisme ψ est une immersion fermée d'image le cône C_n de $S^2(M')$ formé des éléments de rang $\leq n$.

La preuve de ce théorème se fait suivant le schéma que voici: on commence par montrer que l'image de ψ est égale à C_n ; utilisant les opérations de $GL(M)$ dans $E/O(N)$ et $S^2(M')$ et le fait que ψ est un covariant, on montre que ψ , considéré comme morphisme $E/O(N) \rightarrow C_n$ est birationnel pour $m \gg n$; le

Lemme ^(*) 1.- Soit X et Y deux variétés algébriques affines irréductibles et $\psi : X \rightarrow Y$ un morphisme surjectif et birationnel.

Si Y est normale, alors ψ est un isomorphisme.

et le théorème 1 du § 2 permettent de conclure lorsque $m \gg n$; on

déduit enfin l'affirmation du théorème lorsque $m < n$ du cas $m \gg n$.

Preuve du théorème 1. (a) L'image de ψ est égale à C_n .

Il suffit de montrer que l'image de ψ est égale à C_n . Cette image est évidemment contenue dans C_n et contient un élément de rang p pour $p = 0, \dots, \inf(m, n)$; puisqu'elle est stable par $GL(M)$, elle coïncide nécessairement avec C_n .

(b) Pour $m \gg n$, le morphisme $\psi : E/O(N) \rightarrow C_n$ est birationnel.

Lemme 2. - On suppose $m \gg n$. Pour tout $\alpha \in E$ de rang maximum, $\psi'(\psi(\alpha)) = O(N) \cdot \alpha$.

Preuve. Il suffit de prouver que $\psi'(\psi(\alpha))$ est contenu dans $O(N) \cdot \alpha$.

Soit $\beta \in E$ tel que $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$. On a $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$. On note $\bar{i}$

l'homomorphisme $M/\text{Ker}(i) \rightarrow N$ déduit de i par passage au quotient,

$i = \alpha, \beta$. De l'égalité $\bar{\alpha} \otimes \bar{\alpha} = \bar{\beta} \otimes \bar{\beta}$ résulte qu'il existe $s \in O(N)$

tel que $\bar{\beta} = s\bar{\alpha}$, c'est-à-dire $\beta = s\alpha$.

D'après le lemme 2, pour α en position générale dans E , $\bar{\pi}'(\pi(\alpha)) =$

$\psi'(\psi(\alpha)) = O(N) \cdot \alpha$. On en déduit d'une part que $\dim E/O(N) = \dim C_n$

(π est surjectif), et d'autre part que les sous-groupes d'isotropie

$GL(M)_{\pi(\alpha)}$ et $GL(M)_{\psi(\alpha)}$ sont égaux. Or l'orbite $GL(M) \cdot \psi(\alpha)$ est ouverte

et dense dans C_n ; l'orbite $GL(M) \cdot \pi(\alpha)$ a donc la dimension de $E/O(N)$

et par conséquent est ouverte et dense dans $E/O(N)$ ($E/O(N)$ est

irréductible). Comme $\psi\pi(\alpha) = \psi(\alpha)$ et comme ψ commute aux opérations

de $GL(M)$, on a $\psi(GL(M) \cdot \pi(\alpha)) = GL(M) \cdot \psi(\alpha)$ d'où le fait que ψ est

birationnel pour $m \gg n$.

(c) Démonstration du lemme 1.

On note $A = k[Y]$, $B = k[X]$ et K le corps des quotients de A ;

identifiant A à son image dans B , on peut supposer que $A \subset B \subset K$.

D'après le corollaire du théorème 2 et le théorème 4 du § 1 de [1],

A est l'intersection $\bigcap_{\mathfrak{p} \in I} A_{\mathfrak{p}}$, où I est l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de A ; de plus les $A_{\mathfrak{p}}$ sont des anneaux de valuation discrète. On suppose alors que A est distinct de B ; il existe donc $b \in B$ et $\mathfrak{p} \in I$ tels que $b \notin A_{\mathfrak{p}}$. Puisque les corps des fractions de A, $A_{\mathfrak{p}}$ et B coïncident, b s'écrit $b = u^r g$ où $u \in \mathfrak{p}$ est une uniformisante pour $A_{\mathfrak{p}}$, $r < 0$ et g est un élément inversible de $A_{\mathfrak{p}}$; on écrit encore $g = a'/a''$, $a', a'' \in A - \mathfrak{p}$, d'où l'égalité $bu^{-r}a'' = a'$ dans B. Comme $a' \notin \mathfrak{p}$, il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}_y$ de A tel que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_y$ et $a' \notin \mathfrak{m}_y$. Soit alors $\mathfrak{m}_x$ un idéal maximal de B tel que $\mathfrak{m}_x \cap A = \mathfrak{m}_y$ (un tel idéal existe d'après l'hypothèse de surjectivité de ψ). Alors, $a' \notin \mathfrak{m}_x$ d'une part et $bu^{-r}a'' \in \mathfrak{m}_x$ d'autre part, ce qui contredit l'égalité $bu^{-r}a'' = a'$.

(d) Le cas $m < n$.

Soit γ un homomorphisme surjectif $N \rightarrow M$; à γ correspondent des homomorphismes injectifs $E \rightarrow \text{Hom}(N, N)$ et $S^2(M') \rightarrow S^2(N')$: le premier commute aux opérations de $O(N)$ et induit une immersion fermée $E/O(N) \rightarrow \text{Hom}(N, N)/O(N)$. On a de plus le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S^2(M') & \longrightarrow & S^2(N') \\ \psi_m \uparrow & & \psi_n \uparrow \\ E/O(N) & \longrightarrow & \text{Hom}(N, N)/O(N) \end{array}$$

où ψ_m et ψ_n sont comme dans l'énoncé du théorème. D'après ce qui précède, ψ_m est surjectif et ψ_n est un isomorphisme ; on déduit alors immédiatement du fait que les flèches horizontales de ce diagramme représentent des immersions fermées, que ψ_m est un isomorphisme.

Remarque 1. - L'affirmation du lemme 2 est encore vraie lorsque

$m < n$ pour α en position générale dans E ; sa démonstration n'étant plus tout-à-fait évidente, il a paru plus simple (et plus court) de déduire le cas $m < n$ du cas $m = n$.

réduite

Soit X une variété algébrique affine, A une sous-algèbre de type fini de $k[X]$, Y la variété affine définie par $A = k[Y]$ et $\pi : X \rightarrow Y$ le morphisme correspondant à l'inclusion $k[Y] \subset k[X]$. Soit encore P et Q deux espaces vectoriels de dimension finie. On dira que le morphisme $\varphi : X \rightarrow P$ décrit un système de générateurs de A et que le morphisme $\varphi : P \rightarrow Q$ en décrit l'ensemble des relations si $\varphi = \psi \circ \pi$ où ψ est une immersion fermée $Y \rightarrow P$ et si les $(\varepsilon \cdot \varphi)_{\varepsilon \in Q'}$ constituent un système de générateurs de l'idéal de $\psi(Y)$ dans $k[P]$ (cf. l'introduction).

Corollaire. - Le morphisme $\varphi : E \rightarrow S^2(M')$ défini par $\varphi(\alpha) = \sum \alpha_i \alpha_i$ décrit un système de générateurs de la sous-algèbre $k[E]^{O(N)}$ de $k[E]$; le morphisme $\varphi_{m+1} : S^2(M') \rightarrow S^2(\bigwedge^{m+1} M')$ défini par $\varphi_{m+1}(\alpha) = \bigwedge^{m+1} \alpha$ en décrit l'ensemble des relations.

Cela résulte immédiatement du théorème ci-dessus et du théorème 1 du paragraphe 2.

Remarque 2. - Soit (m_i) et (n_j) une base de M et N resp.; soit (μ_i) et (ν_j) les bases duales. Soit $f \in S^2(N')$ défini par $f(n_i) = \nu_i$ $i = 1, \dots, n$. Au moyen de ces bases on identifie E avec l'ensemble des matrices $n \times m$ et $S^2(M')$ avec l'ensemble des matrices symétriques $m \times m$, si bien que φ est l'application $\alpha \mapsto \sum \alpha_i \alpha_i$. Notant enfin x_i $i = 1, \dots, m$ les vecteurs colonnes de α , le corollaire précédent redonne les résultats classiques relatifs à $k[E]^{O(N)}$ (cf. [7] chap. II § 9 et 17), à savoir que l'ensemble des "produits scalaires"

(x_i, x_j) constituent un système de générateurs de $k[E]^{O(N)}$, qu'il n'y a pas de relations entre ceux-ci si $m \leq n$, et que toute relation pour $m > n$ est conséquence des relations exprimant que les mineurs d'ordre $n+1$ de la matrice symétrique $((x_i, x_j))$ sont nuls.

2.

Soit N un espace vectoriel de dimension $2n$ et f un élément de $\Lambda^2(N')$ de rang maximum (on identifie $\Lambda^2(N')$ avec l'ensemble des $\alpha \in \text{Hom}(N, N')$ tels que $\alpha = -{}^t\alpha$). Le groupe $GL(N)$ opère dans $\Lambda^2(N')$; on note $Sp(N)$ le sous-groupe d'isotropie de f (ou de $f^{-1} \in \Lambda^2(N)$). Soit M un espace vectoriel de dimension m . On considère les $GL(M) \times Sp(N)$ -modules $E = \text{Hom}(M, N)$ et $\Lambda^2(M')$ ($Sp(N)$ opérant trivialement dans $\Lambda^2(M')$). On a alors un covariant

$$\begin{array}{ccc} \psi : E & \longrightarrow & \Lambda^2(M') \\ \alpha & \longmapsto & {}^t\alpha \circ \alpha \end{array}$$

qui par définition de $\pi : E \rightarrow E/Sp(N)$ se factorise en

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \pi \swarrow & & \searrow \psi \\ E/Sp(N) & \xrightarrow[\psi]{} & \Lambda^2(M') \end{array}$$

où ψ est un covariant de la $GL(M)$ -variété $E/Sp(N)$.

Exactement comme au numéro 1, on démontre le théorème suivant et son corollaire.

Théorème 2.- Le morphisme ψ est une immersion fermée d'image le cône C_n de $\Lambda^2(M')$ formé des éléments de rang $\leq 2n$.

Corollaire.- Le morphisme $\varphi : E \longrightarrow \bigwedge^2(M')$ défini par $\varphi(\alpha) = \iota_\alpha \otimes \alpha$ décrit un système de générateurs de la sous-algèbre $k[E]^{Sp(N)}$ de $k[E]$; le morphisme $\varphi_{n+1} : \bigwedge^2(M') \longrightarrow \bigwedge^{2n+2}(M')$ défini par $\varphi_{n+1}(\alpha) = \alpha \wedge \dots \wedge \alpha$ ($n+1$ fois) en décrit l'ensemble des relations.

Remarque 3.- L'affirmation selon laquelle $\tilde{\varphi}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \varphi(\alpha_i)$ pour α en position générale dans E n'est pas vraie pour n impair plus petit que $2n$; c'est aussi une raison pour ne pas prouver directement que $\psi : E/Sp(N) \longrightarrow C_n$ est birationnel pour $n < 2n$ (cf. remarque 1).

3.

Soit N, P et Q des espaces vectoriels de dimension n, p et q respectivement. On considère les $GL(P) \times GL(Q) \times GL(N)$ -modules $E = Hom(P, N) \times Hom(Q, N')$ et $Hom(P, Q')$ ($GL(N)$ opérant trivialement dans $Hom(P, Q')$). On a alors un covariant

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & E & \longrightarrow Hom(P, Q') \\ & (\alpha, \beta) & \longmapsto \iota_\beta \alpha \end{array}$$

qui par définition de $\pi : E \longrightarrow E/GL(N)$ se factorise en

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \pi \swarrow & & \searrow \varphi \\ E/GL(N) & \xrightarrow{\psi} & Hom(P, Q') \end{array}$$

où ψ est un covariant de la $GL(P) \times GL(Q)$ -variété $E/GL(N)$.

Théorème 3.- Le morphisme ψ est une immersion fermée d'image le cône C_n de $Hom(P, Q')$ formé des éléments de rang $\leq n$.

La preuve du théorème 3 suit le même schéma que celle du théorème 1 .
Lorsque $\min(p, q) \gg n$, on utilise le lemme 3 ci-dessous et le théo-

rème 3 du § 2 pour démontrer que $\psi : E/GL(N) \longrightarrow C_n$ est birationnel.

Lemme 3:- On suppose $\min(p,q) \geq n$. Pour (α, β) en position générale dans E , on a $\tilde{\psi}(\alpha, \beta) = GL(N).(\alpha, \beta)$.

La preuve du lemme 3 est facile .

Lorsque $\min(p,q) < n$, on choisit des homomorphismes surjectifs $\gamma : P_1 \longrightarrow P$ et $\delta : Q_1 \longrightarrow Q$ où $\dim P_1 = \max(p,n)$ et $\dim Q_1 = \max(q,n)$; à ces homomorphismes correspondent des homomorphismes injectifs $E \longrightarrow \text{Hom}(P_1, N) \times \text{Hom}(Q_1, N')$ et $\text{Hom}(P, Q') \longrightarrow \text{Hom}(P_1, Q'_1)$: le premier commute aux opérations de $GL(N)$ et induit une immersion fermée $E/GL(N) \longrightarrow \text{Hom}(P_1, N) \times \text{Hom}(Q_1, N')/GL(N)$. On a de plus un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(P, Q') & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}(P_1, Q'_1) \\ \psi \uparrow & & \psi_1 \uparrow \\ E/GL(N) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}(P_1, N) \times \text{Hom}(Q_1, N')/GL(N) \end{array}$$

où ψ et ψ_1 sont comme dans l'énoncé du théorème. Comme avant, ψ est surjectif et ψ_1 est un isomorphisme, d'où l'affirmation du théorème dans le cas $\min(p,q) < n$.

Corollaire.- Le morphisme $\gamma : E \longrightarrow \text{Hom}(P, Q')$ défini par $\gamma((\alpha, \beta)) = {}^t \beta \alpha$ décrit un système de générateurs de la sous-algèbre $k[E]^{GL(N)}$ de $k[E]$; le morphisme $\gamma_{n+1} : \text{Hom}(P, Q') \longrightarrow \text{Hom}(\bigwedge^{n+1} P, \bigwedge^{n+1} Q')$ défini par $\gamma_{n+1}(\alpha) = \bigwedge^{n+1} \alpha$ en décrit l'ensemble des relations.

Preuve. Cela résulte immédiatement du théorème 3 ci-dessus et du théorème 3 du § 2 .

Soit M et N deux espaces vectoriels de dimension m et n respectivement. On considère les $GL(M) \times SL(N)$ -modules $E = \text{Hom}(M, N)$ et $\text{Hom}(\bigwedge^m M, \bigwedge^n N)$: le dernier n'est différent de 0 que pour $m \geq n$, le groupe $SL(N)$ y opère trivialement et considéré comme $GL(M)$ -module, il est irréductible. On a alors un covariant

$$\begin{array}{ccc} \varphi : E & \longrightarrow & \text{Hom}(\bigwedge^m M, \bigwedge^n N) \\ \alpha & \longmapsto & \bigwedge^n \alpha \end{array}$$

qui par définition de $\pi : E \rightarrow E/SL(N)$ se factorise en

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \pi \swarrow & & \searrow \varphi \\ E/SL(N) & \xrightarrow{\psi} & \text{Hom}(\bigwedge^m M, \bigwedge^n N) \end{array}$$

où ψ est un covariant de la $GL(M)$ -variété $E/SL(N)$ (φ est le covariant φ_m considéré au § 2 no 3).

Théorème 4. — Le morphisme ψ est une immersion fermée d'image l'adhérence de l'orbite (par $GL(M)$) d'un élément primitif du $GL(M)$ -module irréductible $\text{Hom}(\bigwedge^m M, \bigwedge^n N)$.

Preuve. On désigne par C l'adhérence de l'orbite d'un élément primitif de $\text{Hom}(\bigwedge^m M, \bigwedge^n N)$. On suppose $m \geq n$ (sinon il n'y a rien à démontrer). La preuve du théorème 4 est semblable à celle du théorème 1 ;

on en donne rapidement les étapes.

(a) L'image de ψ est égale à C .

Il suffit de démontrer que l'image de ψ est égale à C . En prenant des bases de M et N par exemple, on vérifie très facilement que si $\alpha \in E$ est de rang n (resp. de rang $< n$), alors $\varphi(\alpha) \in C$ (resp. $\varphi(\alpha) = 0$) ; on a donc $\varphi(E) \subset C$. Comme enfin l'image de ψ est stable par $GL(M)$

et comme $GL(M)$ n'a que deux orbites dans C , on a nécessairement

$$\varphi(E) = C.$$

(b) Le morphisme $\psi : E/SL(N) \longrightarrow C$ est birationnel.

Lemme 4. - Pour tout $\alpha \in E$ de rang maximum, $\tilde{\varphi}(\alpha) = SL(N) \cdot \alpha$.

la preuve du lemme 4 n'offre pas de difficultés.

Du lemme 4 et du fait que $GL(M)$ possède une orbite ouverte et dense dans C , on déduit comme au théorème 1 que ψ est birationnel.

(c) Le morphisme $\psi : E/SL(N) \longrightarrow C$ est un isomorphisme.

Cela résulte de ce qui précède, du lemme 1 et du théorème 2 § 1.

Remarque 4. - Les techniques présentées ici ne permettent pas à priori d'explicitier le morphisme φ décrivant les relations entre les générateurs de la sous-algèbre $k[E]^{SL(N)}$ de $k[E]$ correspondant à φ .

1. Bourbaki N.: Algèbre commutative, chap. 7, Hermann 1965 .
2. Grosshans F.: Observable groups and Hilbert's fourteenth problem, Amer.J.Math.95, 229-253 (1973).
3. Mumford D.: Geometric invariant theory, Springer 1965 .
4. Popov V.L., Vinberg E.B.: Sur une classe de variétés affines presque homogènes, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. Tom 36, no 4, 749-764 (1972) (en russe).
5. Rosenlicht M.: On quotient varieties and the affine embedding of certain homogeneous spaces, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 101, no 2, 211-223 (1961).
6. Vust Th.: Opération de groupes réductifs dans un type de cônes presque homogènes (à paraître).
7. Weyl H.: Classical groups, Princeton university press 1946.

() Note:- L'énoncé du lemme 1 § 3 nous a été communiqué par R.W.Richardson.

CHAPITRE II

PROBLEMES D'ISOTROPIE

Soit N un espace vectoriel de dimension finie, G un groupe algébrique réductif et M un G -module rationnel de dimension finie. On considère l'espace vectoriel $E = \text{Hom}(M, N)$ et les opérations naturelles de $G \times O(N)$, $G \times \text{Sp}(N)$ (lorsque N est de dimension paire) et $G \times \text{SL}(N)$ (lorsque G opère dans M comme sous-groupe de $\text{SL}(M)$ et $\dim M = \dim N + 1$) dans E . Dans ce chapitre on exploite la théorie des invariants des groupes classiques pour décrire l'algèbre des fonctions polynomiales invariantes sur E et le sous-groupe d'isotropie d'un point en position générale dans E à partir de résultats analogues concernant certaines G -variétés algébriques affines naturellement associées au G -module M .

0.

Les notations et conventions sont celles du chapitre précédent.

Soit G un groupe algébrique et H un sous-groupe algébrique de G ; on note H^0 la composante neutre de H , $N_G(H)$ le normalisateur de H dans G et $Z_G(H)$ le centralisateur de H dans G .

Soit G et H deux groupes algébriques réductifs. On suppose que le groupe $G \times H$ opère (morphiquement) dans une variété algébrique affine X . Puisque $k[X]^{G \times H} = (k[X]^H)^G = k[X/H]^G$, on a le diagramme commutatif

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} & X & \\ \pi_{G \times H} \swarrow & & \searrow \pi_H \\ X/(G \times H) & \xleftarrow{\pi_G} & X/H \end{array}$$

correspondant à $k[X]^{G \times H} \subset k[X]^H \subset k[X]$. Le morphisme π_H commute aux opérations de $G \times H$ dans X et de G dans X/H .

Lemme 1.- Le morphisme π_H induit une bijection entre les orbites fermées de $G \times H$ dans X et les orbites fermées de G dans X/H .

Preuve. Par commutativité du diagramme (1), π_H induit une bijection entre les fibres de $\pi_{G \times H}$ et celles de π_G : en fait, puisque π_H est surjectif, pour tout $\xi \in X/(G \times H)$, on a $\pi_H(\pi_{G \times H}^{-1}(\xi)) = \pi_G^{-1}(\xi)$. Il reste à voir que π_H envoie l'unique orbite fermée T_ξ de $G \times H$ dans $\pi_{G \times H}^{-1}(\xi)$ sur l'unique orbite fermée T'_ξ de G dans $\pi_G^{-1}(\xi)$. En effet, $\pi_H^{-1}(T'_\xi)$ est fermé et contient donc nécessairement T_ξ .

On identifie H au sous-groupe $\{1\} \times H$ de $G \times H$. Pour tout $x \in X$, on a une suite

$$1 \longrightarrow H_x \xrightarrow{i} (G \times H)_x \xrightarrow{pr_1} G_{\pi_H(x)} \longrightarrow 1 \quad (2)$$

où i est la restriction à H_x de l'injection $h \mapsto (1, h)$ et pr_1 la restriction à $(G \times H)_x$ de la projection $(g, h) \mapsto g$, $g \in G$, $h \in H$.

- (a) pour tout $x \in X$ tel que $H.x$ est fermée (resp. ouverte dense) dans $\pi_H^{-1}(\pi_H(x))$,
 (b) pour tout $x \in X$ tel que $(G \times H).x$ est fermé dans X .

Preuve. La seule chose à démontrer est que pr_1 est surjectif dans les cas (a) et (b).

(a) Soit $x \in X$; le groupe $G_{\pi_H^{-1}(\pi_H(x))}$ opère dans la fibre $\pi_H^{-1}(\pi_H(x))$ et commute à l'opération de H ; on a alors clairement $G_{\pi_H^{-1}(\pi_H(x))}(H.x) = H.x$ si $H.x$ est ouverte dense dans $\pi_H^{-1}(\pi_H(x))$ ou si $H.x$ est fermée (puisque alors $H.x$ est la seule orbite fermée de H dans $\pi_H^{-1}(\pi_H(x))$).

(b) On suppose que X est $G \times H$ -homogène. Soit $x \in X$; d'après (a), il existe $y \in \pi_H^{-1}(\pi_H(x))$ tel que $pr_1: (G \times H)_y \rightarrow G_{\pi_H^{-1}(\pi_H(y))}$ soit surjectif. Or comme $x = (g, h).y$ avec $g \in G_{\pi_H^{-1}(\pi_H(x))} = G_{\pi_H^{-1}(\pi_H(y))}$ et $h \in H$, on a $(G \times H)_x = ad(g, h)(G \times H)_y$; le morphisme $pr_1: (G \times H)_x \rightarrow G_{\pi_H^{-1}(\pi_H(x))}$ est donc surjectif.

Le cas (b) provient alors du cas particulier ci-dessus et du fait que si $(G \times H).x$ est fermée, l'inclusion $(G \times H).x \subset X$ induit une G -immersion fermée $(G \times H).x/H \rightarrow X/H$.

Remarque 1.- On verra plus loin, aux remarques 4 et 6, des exemples où la suite (2) n'est pas exacte.

Corollaire.- Si X est un espace vectoriel et si H est semi-simple, alors pour x en position générale dans X , la suite (2) est exacte.

Preuve. D'après [2] chap.III § 3, pour x en position générale dans X , la fibre $\pi_H^{-1}(\pi_H(x))$ est lisse et H opère transitivement dans ses composantes connexes. Puisqu'on suppose H semi-simple, on a encore

$\dim H.x = \dim H^0.x = \dim \tilde{\chi}_H(x)$ (cf. [2] chap. III § 4 et [3] lemme 1).

Il résulte bien de là que $H.x$ est ouverte dense dans $\tilde{\chi}_H(x)$; la conclusion provient du lemme 2 (a) .

2.

Soit N un espace vectoriel de dimension n , f un élément de $S^2(N')$ de rang maximum et $O(N) = GL(N)_f$. Soit G un groupe réductif et M un G -module de dimension m . On considère le $G \times O(N)$ -module $E = \text{Hom}(M, N)$ et le G -module $S^2(M')$; le groupe G opère dans le cône C_m de $S^2(M')$ formé des éléments de rang $\leq n$.

Proposition 1.- La variété $E/(G \times O(N))$ est canoniquement isomorphe à la variété C_n/G .

Cela résulte immédiatement du théorème 1 chap. I § 3 .

Exemple 1.- Si $m \leq n$, on a donc un isomorphisme entre $E/(G \times O(N))$ et $S^2(M')/G$. En particulier, si $G = SL(M)$, $E/(SL(M) \times O(N))$ est isomorphe à la droite k : $k[E]^{SL(M) \times O(N)}$ est une algèbre de polynômes à une indéterminée engendrée par $\alpha \mapsto \det(t_\alpha \otimes \alpha)$.

Proposition 2.- Pour α en position générale dans E , on a

l'extension inessentielle

$$1 \longrightarrow O(N)_\alpha \xrightarrow{i} (G \times O(N))_\alpha \xrightarrow{p_\alpha} G_{t_\alpha \otimes \alpha} \longrightarrow 1$$

($t_\alpha \otimes \alpha \in S^2(M')$).

Preuve. L'exactitude de la suite provient immédiatement du corollaire du lemme 2 et du théorème 1 chap. I § 3 .

On suppose $m < n$ (sinon $O(N)_\alpha = \{1\}$ et il n'y a plus rien à démontrer). Soit alors $\alpha \in E$ tel que $t_\alpha \otimes \alpha$ soit de rang m . On a donc

les décompositions

$$N' = \text{Im}(f\alpha) \oplus \text{Ker}({}^t\alpha)$$

$$\text{et } N = \text{Im}(\alpha) \oplus \text{Ker}({}^t\alpha f).$$

On identifie ensuite $\text{Im}(\alpha)'$ (resp. $\text{Ker}({}^t\alpha f)'$) avec l'orthogonal de $\text{Ker}({}^t\alpha f)$ (resp. $\text{Im}(\alpha)$), c'est-à-dire $\text{Im}(\alpha)'$ avec $\text{Im}({}^t\alpha)$ (resp. $\text{Ker}({}^t\alpha f)'$ avec $\text{Ker}({}^t\alpha)$).

A $s \in G_{{}^t\alpha f\alpha}$ on associe l'application linéaire $\sigma(s): N \rightarrow N$ définie par $\sigma(s)|_{\text{Im}(\alpha)} = \alpha s \alpha^{-1}$ et $\sigma(s)|_{\text{Ker}({}^t\alpha f)} = \text{id}$; il est clair que l'homomorphisme $s \mapsto (s, \sigma(s))$ est une section de $\text{pr}_1: (G \times O(N))_{\alpha} \rightarrow G_{{}^t\alpha f\alpha}$.

Corollaire. - (cf. [1] théorème 5) On suppose que $m \leq n$; alors, pour tout $\alpha \in E$ tel que ${}^t\alpha f\alpha \in S^2(M')$ soit de rang m , le groupe d'isotropie $(G \times O(N))_{\alpha}$ est isomorphe au produit direct du groupe orthogonal $O(N/m)$ et du groupe $G_{{}^t\alpha f\alpha}$.

Cela résulte facilement de la démonstration de la proposition 2.

3.

Soit N un espace vectoriel de dimension $2n$, f un élément de $\bigwedge^2 N'$ de rang maximum et $\text{Sp}(N) = \text{GL}(N)_f$. Soit G un groupe réductif et M un G -module de dimension m . On considère le $G \times \text{Sp}(N)$ -module $E = \text{Hom}(M, N)$ et le G -module $\bigwedge^2 M'$; le groupe G opère dans le cône C_n de $\bigwedge^2 M'$ formé des éléments de rang $\leq 2n$.

Proposition 3. - La variété $E/(G \times \text{Sp}(N))$ est canoniquement isomorphe à la variété C_n/G .

Cela résulte immédiatement du théorème 2 chap. I § 3.

Exemple 2. - Si $m \leq 2n$, on a donc un isomorphisme entre $E/(G \times \text{Sp}(N))$

et $\bigwedge^2 M'/G$. En particulier, si $G = SL(M)$, $E(SL(M) \times Sp(N))$ est isomorphe à la droite k si m est pair et est réduite à un point si m est impair: lorsque m est pair, $k[E]^{SL(M) \times Sp(N)}$ est une algèbre de polynômes à une indéterminée engendrée par $\alpha \longmapsto (\alpha \wedge \alpha \wedge \dots \wedge \alpha \wedge \alpha)$ ($m/2$ -fois). Si $G = SO(M)$ (avec toujours $m \leq 2n$), puisque la représentation de $SO(M)$ dans $\bigwedge^2 M'$ est isomorphe à la représentation adjointe de $SO(M)$, $E(SO(M) \times Sp(N))$ est isomorphe à l'espace affine $k^{[m/2]}$.

Proposition 4. - Pour $\alpha \in E$ en position générale, on a une suite exacte

$$1 \rightarrow Sp(N)_\alpha \xrightarrow{i} (G \times Sp(N))_\alpha \xrightarrow{pr_1} G_{t_\alpha \wedge \alpha} \rightarrow 1$$

($t_\alpha \wedge \alpha \in \bigwedge^2 M'$); cette extension est inessentielle
si $m \geq 2n$ ou si m est pair.

Preuve. L'exactitude de la suite provient immédiatement du corollaire du lemme 2 et du théorème 2 chap. I § 3.

Lorsque m est pair plus petit que $2n$, prenant pour α un élément de E tel que $t_\alpha \wedge \alpha$ soit de rang m , on peut reconduire telle quelle la preuve de la proposition 2 pour montrer qu'il existe une section de pr_1 .

Comme au numéro 2, la preuve de la proposition 4 fournit le

Corollaire. - On suppose m pair plus petit que $2n$; alors pour tout $\alpha \in E$ tel que $t_\alpha \wedge \alpha \in \bigwedge^2 M'$ soit de rang m , le groupe d'isotropie $(G \times Sp(N))_\alpha$ est isomorphe au produit direct du groupe symplectique $Sp(N/M)$ et du groupe $G_{t_\alpha \wedge \alpha}$.

Remarque 2. - Lorsque m est impair plus petit que $2n$, l'extension de la proposition 4 n'est pas inessentielle en général. On considère par exemple le cas où $m = 2n-1$ et $G = SL(M)$. Soit alors $\alpha \in E$

de rang m et tel que $t_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ soit de rang $2n-2$; de tels éléments constituent un ouvert non vide de E . On vérifie facilement que $Sp(N)_{\alpha}$ est un groupe unipotent de dimension 1 et que le radical unipotent de $SL(M)_{t_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}}$ est commutatif de dimension $2n-2$. D'autre part, d'après la proposition 8 ci-dessous, $(SL(M) \times Sp(N))_{\alpha} \xrightarrow{p_{\alpha}} Sp(N)_{\alpha}$ ($\bigwedge^{2n-1} \in \text{Hom}(\bigwedge^{2n-1} M, \bigwedge^{2n-1} N) \simeq \bigwedge^{2n-1} N \simeq N'$) est un isomorphisme. On vérifie alors que pour β non nul appartenant à N' (par exemple $\beta = \bigwedge^{2n-1} \alpha$), le radical unipotent de $Sp(N)_{\beta}$ est non commutatif de dimension $2n-1$.

L'extension

$$1 \longrightarrow Sp(N)_{\alpha} \longrightarrow (SL(M) \times Sp(N))_{\alpha} \longrightarrow SL(M)_{t_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}} \longrightarrow 1$$

n'est pas inessentielle: sinon le radical unipotent de $(SL(M) \times Sp(N))_{\alpha}$ serait isomorphe au produit semi-direct d'un groupe unipotent commutatif de dimension $2n-2$ par un groupe unipotent de dimension 1 et par conséquent serait commutatif.

Remarque 3.-La proposition 4, son corollaire et la remarque précédente démontrent (sans l'intermédiaire de tables ou de classifications) et précisent les résultats du théorème 6 de [1].

4.

Soit N un espace vectoriel de dimension n ; soit G et H deux groupes algébriques réductifs, P (resp. Q) un G -module (resp. un H -module) de dimension $p > 0$ (resp. $q > 0$). On considère le $GL(N) \times G \times H$ -module $E = \text{Hom}(P, N) \times \text{Hom}(Q, N')$ et le $G \times H$ -module $\text{Hom}(P, Q')$; le groupe $G \times H$ opère dans le cône C_n de $\text{Hom}(P, Q')$ formé des éléments de rang $\leq n$.

Proposition 5.- La variété $E/(GL(N) \times G \times H)$ est canoniquement isomorphe à la variété $C_n/(G \times H)$.

Cela résulte immédiatement du théorème 3 chap. I § 3.

Proposition 6.- On suppose $p, q \leq n$; alors pour $(\alpha, \beta) \in E$ en position générale, on a une suite exacte

$$1 \rightarrow GL(N)_{(\alpha, \beta)} \xrightarrow{\quad} (GL(N) \times G \times H)_{(\alpha, \beta)} \xrightarrow{\quad} (G \times H)_{\beta \alpha} \rightarrow 1$$

$$(\beta \alpha \in \text{Hom}(P, Q')).$$

Preuve. Si $p \leq q \leq n$ par exemple, on vérifie facilement que, pour (α, β) en position générale dans E , $GL(N)_{(\alpha, \beta)}$ est isomorphe au produit semi-direct de $GL(N/Q)$ par un groupe unipotent de dimension $(n-q)(q-p)$; par conséquent, l'orbite $GL(N) \cdot (\alpha, \beta)$ est de dimension $\dim E - \dim E/GL(N)$ (cf. théorème 3 chap. I § 3). Utilisant les résultats de [2] chap. III § 3, on déduit que $GL(N) \cdot (\alpha, \beta)$ est ouverte dense dans la fibre $\pi_{GL(N)}^{-1} \pi_{GL(N)}(\alpha, \beta)$; la conclusion provient alors du lemme 2 et du fait que $\pi_{GL(N)}(\alpha, \beta) = \beta \alpha \in \text{Hom}(P, Q')$.

Remarque 4.- La suite de la proposition 6 n'est pas exacte si on ne fait pas d'hypothèses sur p et q . Par exemple, si $p = 2$, $n = 3$, $q = 4$, $G = \{1\}$ et $H = GL(Q)$, alors le $GL(N) \times H$ -module E (resp. le H -module $E/GL(N) \simeq \text{Hom}(P, Q')$) est presque homogène: l'isotropie d'un point en position générale dans E (resp. $\text{Hom}(P, Q')$) est donc de dimension 7 (resp. 8), d'où l'affirmation.

Remarque 5.- Soit G et H deux sous-groupes algébriques réductifs de $GL(N)$. Les propositions 5 et 6 fournissent un procédé de construction d'un $GL(N) \times G \times H$ -module E à partir du $G \times H$ -module $F = \text{Hom}(N, N')$ de telle sorte que les variétés $E/(GL(N) \times G \times H)$ et $F/(G \times H)$ soient isomorphes et que l'isotropie d'un point en position générale dans

E soit isomorphe à l'isotropie d'un point en position générale dans F .

5.

Soit N un espace vectoriel de dimension n . Soit G un groupe algébrique réductif et M un G-module de dimension $m \geq n$. On considère le $G \times SL(N)$ -module $E = \text{Hom}(M, N)$ et le G-module $\text{Hom}(\tilde{\wedge}^n M, \tilde{\wedge}^n N) \simeq (\tilde{\wedge}^n M)'$; le groupe G opère dans le cône C de $(\tilde{\wedge}^n M)'$ formé des éléments décomposables (i.e. l'adhérence de l'orbite d'un élément primitif du $GL(M)$ -module irréductible $(\tilde{\wedge}^n M)'$).

Proposition 7.- La variété $E/(G \times SL(N))$ est canoniquement isomorphe à la variété C/G .

Cela résulte immédiatement du théorème 4 chap. I § 3 .

Corollaire.- On suppose $m = n+1$ et que G opère dans M comme sous-groupe de $SL(M)$; alors $E/(G \times SL(N))$ est isomorphe (non canoniquement) à M/G .

Preuve. Si $m = n+1$, $C = (\tilde{\wedge}^n M)'$ est $SL(M)$ -isomorphe à M .

Proposition 8.- Pour tout $\alpha \in E$ de rang maximum, la première projection $G \times SL(N) \rightarrow G$ induit un isomorphisme $(G \times SL(N))_{\alpha} \rightarrow G_{\tilde{\wedge}^n \alpha} \quad (\tilde{\wedge}^n \alpha \in (\tilde{\wedge}^n M)')$.

Cela provient du théorème 4 , du lemme 4 du chap. I § 3 et du lemme 2 .

Remarque 6.- La proposition 8 n'est pas vraie en général si on ne suppose pas α de rang maximum. En effet, si α n'est pas de rang maximum, $\tilde{\wedge}^n \alpha = 0$ d'où $G_{\tilde{\wedge}^n \alpha} = G$; de l'autre côté, si $(g, s) \in (G \times SL(N))_{\alpha}$, alors $g(\text{Ker}(\alpha)) = \text{Ker}(\alpha)$, condition qui n'est généralement pas

Dans la suite de numéro on suppose que $m = n+1$ et que G opère dans M comme sous-groupe de $SL(M)$. On note $H = G \times SL(N)$.

Le corollaire de la proposition 7 et la proposition 8 fournissent un procédé de construction d'un H -module E à partir d'un G -module M de telle sorte que les variétés E/H et M/G soient isomorphes et que l'isotropie d'un point en position générale dans E soit isomorphe à l'isotropie d'un point en position générale dans M . On va examiner de plus près, à titre d'exemple et en vue d'un usage ultérieur au chapitre III , les relations entre le G -module M et le H -module E .

D'après le lemme 1 et le théorème 4 chap. I § 3 , le morphisme $\pi_{SL(N)}: E \longrightarrow (\hat{\Lambda} M)'$ défini par $\alpha \mapsto \hat{\Lambda} \alpha$ induit une bijection entre les orbites fermées de H dans E et les orbites fermées de G dans $(\hat{\Lambda} M)' \simeq M$. Pratiquement, on a les traductions que voici:

Proposition 9.- Soit $\alpha \in E$ de rang maximum. Alors pour que $H.\alpha$ soit fermée (resp. que 0 appartienne à $\overline{H.\alpha}$), il faut et il suffit que pour tout $x \in \text{Ker}(\alpha)$, $G.x$ soit fermée (resp. que 0 appartienne à $\overline{G.x}$).

Preuve. D'après le lemme 4 du chap. I , pour $\alpha \in E$ de rang maximum, $\pi_{SL(N)}^{-1} \pi_{SL(N)}(\alpha) = SL(N).\alpha$; de là et du lemme 1 résulte facilement que pour que $H.\alpha$ soit fermée, il faut et il suffit que $G.\pi_{SL(N)}(\alpha)$ soit fermée. Comme $\pi_{SL(N)}$ envoie surjectivement la fibre de $\pi_H: E \longrightarrow E/H$ passant par 0 sur la fibre de $\pi_G: E/SL(N) \simeq (\hat{\Lambda} M)' \longrightarrow E/H$ passant par 0 , pour que 0 appartienne à $\overline{H.\alpha}$, il faut et il suffit que 0 appartienne à $\overline{G.\pi_{SL(N)}(\alpha)}$.

On désigne par $\varphi : (\hat{\Lambda} M)' \longrightarrow M$ un $SL(M)$ -isomorphisme (donc aussi un G -isomorphisme): φ est unique à homothétie près et pour tout $\alpha \in E$, $\varphi \circ \pi_{\alpha(N)}(\alpha) \in \text{Ker}(\alpha)$. Les assertions de la proposition 9 sont dès lors claires.

Remarque 7.- Soit P un espace vectoriel de dimension p . On considère le $SL(P)$ -module $M = \bigoplus^p P$; d'après les propositions 8 et 9, l'orbite d'un point en position générale dans le $SL(P) \times SL(N)$ -module $E = \text{Hom}(M, N)$ est fermée et de codimension 1 dans E et est isomorphe à $SL(P) \times SL(N)$ (on suppose toujours $m = p^2 = n + 1$). Itérant le procédé (ou faisant varier p), on voit qu'il existe une infinité de groupes semi-simples qui sont isomorphes (en tant que variétés algébriques affines) à une hypersurface d'un espace k^r .

Dans la suite on se donne un élément $\alpha \in E$ de rang maximum et un point $x \in \text{Ker}(\alpha)$, $x \neq 0$. L'homomorphisme α induit un isomorphisme $\bar{\alpha} : M/\text{Ker}(\alpha) \longrightarrow N$; on note $\bar{M} = M/\text{Ker}(\alpha)$ et on convient d'identifier $\bar{M}$ avec N au moyen de $\bar{\alpha}$ et ensuite E avec $\text{Hom}(M, \bar{M})$. L'opération du groupe d'isotropie G_x dans M induit une opération de G_x dans $\bar{M}$: on note $\bar{g}$ l'automorphisme de $\bar{M}$ déduit de $g \in G_x$ par passage aux quotients. Du fait que G opère dans M comme sous-groupe de $SL(M)$ résulte encore que $\bar{g} \in SL(\bar{M})$, $g \in G_x$; on notera enfin $\bar{G}_x$ l'image de G_x dans $SL(\bar{M})$.

Proposition 10.- (a) $H_\alpha = \left\{ (g, \bar{g}) \in G \times SL(\bar{M}) \mid g \in G_x \right\}$;
(b) $E^{H_\alpha} = \text{Hom}(M, \bar{M})^{G_x}$.

Preuve. Soit $\varphi : (\hat{\Lambda} M)' \longrightarrow M$ un $SL(M)$ -isomorphisme. Puisqu'on a $\varphi(\hat{\Lambda} \alpha) \in \text{Ker}(\alpha)$, la première projection $H = G \times SL(\bar{M}) \longrightarrow G$ induit

un isomorphisme $H_\alpha \xrightarrow{\alpha} G_X$ (cf. proposition 8). Soit $g \in G_X$; comme après identification, α est la projection canonique $M \rightarrow \bar{M}$, il est évident que le seul élément $s \in SL(\bar{M})$ tel que $(g,s) \in H_\alpha$ est $\bar{g}$. La première affirmation est donc démontrée; quant à la deuxième, elle résulte directement de la première et des définitions.

Proposition 11.- On suppose G_X réductif. On a alors une suite exacte

$$1 \rightarrow Z_{SL(\bar{M})}(\bar{G}_X) \xrightarrow{i} N_H(H_\alpha) \xrightarrow{pr_1} N_G(G_X) \rightarrow 1 .$$

Preuve. Il est clair que i (qui est définie par $i(s) = (1,s)$) est injective et que l'image de i est contenue dans le noyau de pr_1 (qui est définie par $pr_1(g,s) = g$). Inversément, si $(1,s)$ appartient à $N_H(H_\alpha)$, s appartient à $Z_{SL(\bar{M})}(\bar{G}_X)$ (cf. proposition 10), c'est-à-dire que $(1,s)$ appartient à l'image de i .

Il reste à démontrer que pr_1 est surjective. Soit donc $g \in N_G(G_X)$. On note M_g l'espace vectoriel M muni de la structure de G -module décrite par $g' * y = gg'g^{-1} \cdot y$, $g' \in G$, $y \in M$. Puisque $g \in N_G(G_X)$, les deux G_X -modules M et M_g sont isomorphes. De plus $\text{Ker}(\alpha)$ est contenu dans $(M)^{G_X}$ et dans $(M_g)^{G_X}$; de la réductivité de G_X résulte alors que $M/\text{Ker}(\alpha) = \bar{M}$ et $M_g/\text{Ker}(\alpha)$ sont G_X -isomorphes: il existe $s \in SL(\bar{M})$ tel que

$$\begin{aligned} sg's^{-1} \cdot z &= \bar{g}' * z & g' \in G_X , z \in \bar{M} \\ \text{i.e. } sg's^{-1} \cdot z &= \overline{gg'g^{-1}} \cdot z . \end{aligned}$$

Il résulte bien de là que $(s,g) \in N_H(H_\alpha)$ (cf. proposition 10), ce qui achève la démonstration.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & H_\alpha & \longrightarrow & G_\alpha \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & Z_{SL(\bar{M})}(\bar{G}_\alpha) & \xrightarrow{i} & N_H(H_\alpha) & \xrightarrow{pr_1} & N_G(G_\alpha) \longrightarrow 1
 \end{array} \quad (3)$$

dont les lignes sont exactes si G_α est réductif (propositions 10 et 11) et dont les flèches verticales représentent les injections canoniques.

Corollaire. - On suppose G_α réductif. Alors la suite des conoyaux

$$1 \longrightarrow Z_{SL(\bar{M})}(\bar{G}_\alpha) \longrightarrow N_H(H_\alpha)/H_\alpha \longrightarrow N_G(G_\alpha)/G_\alpha \longrightarrow 1$$

de (3) est exacte.

Preuve. C'est le lemme du serpent appliqué au diagramme (3).

Bibliographie.

1. Elashvili A.G.: Stationary subalgebras of points of the common state for irreducible linear Lie groups. Funkcional. Anal. i Priložen. 6 no 2, 65-78 (1972); English transl. Functional Anal. Appl. vol. 6 no 2, 139-148 (1972).
2. Luna D.: Slices étales. Bull. Soc. Math. France, Mémoire 33, 81-105 (1973).
3. Popov V.L.: Stability criteria for the action of a semi-simple group on a factorial manifold. Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. Tom 34 (1970), no 3; English transl. Math. USSR-Izvestija, Vol. 4 (1970), no 3, 527-535.

CHAPITRE III

RESTRICTION DE COVARIANTS

CHAPITRE III

RESTRICTION DE COVARIANTS

§ 1. Platitude et covariants.

Soit G un groupe algébrique réductif et M un G -module rationnel de dimension finie. On considère l'algèbre S des fonctions polynomiales sur M et sa sous-algèbre J formée des fonctions invariantes par G . Dans ce paragraphe on explore la condition S est un J -module libre.[¶]

O.

Le corps de base k est algébriquement clos et de caractéristique nulle.

Soit G un groupe algébrique réductif. Lorsqu'on parle de G -modules (sans autre précision) il s'agit de G -modules rationnels de dimension finie. Si M est un G -module, on note M' le G -module dual de M et M^G le sous-espace de M formé des x de M tels que $s.x = x$ pour tout $s \in G$.

Soit X une variété algébrique affine; on suppose que G opère (morphiquement) dans X . On note $k[X]$ l'algèbre des fonctions régulières sur X ; le groupe G opère dans $k[X]$ par $(s.f)(x) = f(s^{-1}.x)$, $s \in G$, $f \in k[X]$, $x \in X$; on désigne par $k[X]^G$ la sous-algèbre de $k[X]$ formée des fonctions invariantes par G , c'est-à-dire des fonctions f qui vérifient $f(s.x) = f(x)$, $s \in G$, $x \in X$. Du fait que G est réductif résulte que $k[X]^G$ est une k -algèbre de type fini: on peut donc définir une variété algébrique affine X/G par $k[X/G] = k[X]^G$. On notera π_x (ou π si aucune confusion n'en résulte) le morphisme

$X \longrightarrow X/G$ correspondant à l'inclusion $k[X]^G \subset k[X]$.

Enfin, si H est un sous-groupe de G , on note $N_G(H)$ le normalisateur de H dans G .

1.

Soit G un groupe algébrique réductif et X une variété algébrique affine où G opère (morphiquement). On rappelle une notion déjà introduite au chapitre I : un covariant de X à valeurs dans le G -module N est un morphisme (de variétés algébriques affines) $\gamma : X \rightarrow N$ qui commute aux opérations de G dans X et N , c'est-à-dire tel que $s \cdot \gamma(x) = \gamma(s \cdot x)$, $s \in G$, $x \in X$. On notera $\text{Mor}_G(X, N)$ l'ensemble des covariants de X à valeurs dans N ; cet ensemble est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel sur k .

On a un isomorphisme naturel entre $\text{Mor}_G(X, N)$ et $\text{Hom}_G(N', k[X])$. De la structure de $k[X]^G$ -module de $k[X]$, on déduit une structure de $k[X]^G$ -module sur $\text{Hom}_G(N', k[X])$: $(fu)(\xi) = (f)(u(\xi))$, $f \in k[X]^G$, $u \in \text{Hom}_G(N', k[X])$, $\xi \in N'$; on vérifie facilement que cette structure correspond à celle définie sur $\text{Mor}_G(X, N)$ par $(f\gamma)(x) = f(x)\gamma(x)$, $f \in k[X]^G$, $\gamma \in \text{Mor}_G(X, N)$, $x \in X$.

Si $X = M$ est un G -module, la graduation de $k[M]$ induit une graduation sur $k[M]^G$ et sur $\text{Mor}_G(M, N)$: $\text{Mor}_G(M, N)$ est alors un $k[M]^G$ -module gradué.

Exemple 1. - Soit K un sous-groupe réductif de G ; $\text{Mor}_G(G/K, N)$ est canoniquement isomorphe à N^K via l'application $\gamma \mapsto \gamma(\bar{1})$ où $\bar{1}$ désigne la classe de l'élément neutre 1 modulo K .

Exemple 2. - Soit M un espace vectoriel de dimension 2 et (e_1, e_2) une base de M ; on considère la représentation de $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans M donnée matriciellement par $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$ où $j \neq 1$ est une racine cubique de l'unité. Alors $k[M]^G$ est le sous-anneau de $k[M]$ engendré par les trois fonctions x_1^3 , x_1x_2 , x_2^3 . Soit N le sous- G -module de M engendré par le premier vecteur de base de M ; le $k[M]^G$ -module $\text{Mor}_G(M, N)$ est engendré par les deux applications $x_1e_1 + x_2e_2 \mapsto x_1e_1$ et $x_1e_1 + x_2e_2 \mapsto x_2^2e_1$; ce n'est pas un $k[M]^G$ -module libre.

Exemple 3. - Soit N un espace vectoriel de dimension $2n$; on considère le $SL(N)$ -module $\bigwedge^2 N = M$. Alors $k[M]^{SL(N)}$ est une algèbre de polynômes à une indéterminée engendrée par le "pfaffien" $\omega \mapsto \omega \wedge \dots \wedge \omega$ (n -fois) et $\text{Mor}_{SL(N)}(M, \bigwedge^2 N)$ est un $k[M]^{SL(N)}$ -module libre de rang 1 engendré par $\omega \mapsto \omega \wedge \dots \wedge \omega$ (i -fois), $i = 1, \dots, n-1$ (cf. chap. I § 3 proposition 2).

On désigne par ξ un point de X/G et par $\mathfrak{m}_\xi$ l'idéal maximal de $k[X]^G = k[X/G]$ correspondant.

Lemme 1. - Il existe un isomorphisme naturel $\text{Mor}_G(X, N) \otimes_{k[X/G]} k[X/G]/\mathfrak{m}_\xi \rightarrow \text{Mor}_G(\tilde{X}(\xi), N)$.

Preuve. Puisque G est réductif, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_G(N', \mathfrak{m}_\xi k[X]) \rightarrow \text{Hom}_G(N', k[X]) \rightarrow \text{Hom}_G(N', k[X]/\mathfrak{m}_\xi k[X]) \rightarrow 0.$$

Il reste donc à prouver que $\mathfrak{m}_\xi \text{Hom}_G(N', k[X]) = \text{Hom}_G(N', \mathfrak{m}_\xi k[X])$.

Or il est clair que $(*) \mathfrak{m}_\xi \text{Hom}(N', k[X]) = \text{Hom}(N', \mathfrak{m}_\xi k[X])$. De plus

$(\mathfrak{m}_\xi \text{Hom}(N', k[X]))^G = \mathfrak{m}_\xi \text{Hom}_G(N', k[X])$: en effet, puisque G est

réductif, $(\mathfrak{m}_\xi \text{Hom}(N', k[X]))^G$ est l'image de $(\mathfrak{m}_\xi \otimes \text{Hom}(N', k[X]))^G =$

$\mathfrak{m}_\xi \otimes \text{Hom}_G(N', k[X])$ par l'application canonique (surjective)

$\mathcal{M} \otimes \text{Hom}(N', k[X]) \rightarrow \mathcal{M} \otimes \text{Hom}(N', k[X])$. L'égalité cherchée s'obtient donc en prenant les invariants de $(*)$.

2.

Soit G un groupe algébrique réductif et M un G -module. C'est dans ce numéro qu'on va étudier la condition " $k[M]$ est un $k[M]^G$ -module libre".

Remarque 1.— Si on voulait se placer dans le cadre plus général de l'opération de G dans une variété algébrique affine, il faudrait remplacer la condition précédente par " $k[X]$ est un $k[X]^G$ -module plat" (les modules gradués en degrés positifs plats sont libres).

Exemple 4.— On considère la représentation adjointe de G (supposé connexe) dans son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$; alors $k[\mathfrak{g}]$ est un $k[\mathfrak{g}]^G$ -module libre (cf. [4] p. 385).

Exemple 5.— Soit M un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de $GL(M)$; alors, pour que $k[M]$ soit un $k[M]^G$ -module libre, il faut et il suffit que G soit engendré par des pseudo-réflexions de M (cf. [3] chap. V § 5 no 5).

Exemple 6.— Si $k[M]^G$ est une algèbre de polynômes à une indéterminée, alors $k[M]$ est un $k[M]^G$ -module libre comme on le vérifie très facilement (voir aussi [3] chap. V § 5 no 5); cette circonstance se produit par exemple lorsque l'orbite d'un point en position générale dans M est fermée et de codimension 1 dans M (cf. [9] § 2 lemme 2).

Exemple 7.— Soit $G = k^\star$ et M un G -module tel que $M^G = (0)$. Alors, pour que $k[M]$ soit un $k[M]^G$ -module libre, il faut et il suffit que $\dim M \leq 2$ ou que $k[M]^G$ soit réduit aux fonctions constantes. En effet

pour l'orbite d'un point de M , deux cas seulement sont possibles: elle est fermée ou 0 appartient à son adhérence. La fibre générique de $\pi : M \rightarrow M/G$ est donc soit de dimension 1 soit égale à M tout entier. On vérifie encore facilement que si $\dim M \geq 3$, alors $\dim \pi^{-1}(0) \geq 2$. Maintenant, si $k[M]$ est un $k[M]^G$ -module libre, toutes les fibres de π sont de même dimension (cf. [7] § 13); de ce qui précède résulte donc que $\dim M \leq 2$ ou que $\pi^{-1}(0) = M$ (i.e. $k[M]^G = k$). Réciproquement, si $k[M]^G = k$, il est évident que $k[M]$ est $k[M]^G$ -libre; si $k[M]^G \neq k$ et si $\dim M \leq 2$, on se trouve dans le cas de l'exemple 6. L'affirmation est donc démontrée.

Proposition 1.- On suppose que $k[M]$ est un $k[M]^G$ -module libre. Alors $k[M]^G$ est une algèbre graduée de polynômes.

Preuve. Voir [3] chap. V § 5 no 3.

Remarque 2.- La condition " $k[M]^G$ est une algèbre de polynômes" n'implique pas en général (sauf lorsque $\dim k[M]^G = 1$) que $k[M]$ est un $k[M]^G$ -module libre. On prend par exemple le $SL(N)$ -module $E = \text{Hom}(M, N)$ où $\dim N = n = \dim M - 1$. D'après les résultats du chap. I § 3 no 4, le morphisme $\gamma : E \rightarrow \text{Hom}(\hat{\Lambda}^n M, \hat{\Lambda}^n N)$ défini par $\alpha \mapsto \hat{\Lambda}^n \alpha$ est le morphisme quotient pour l'opération de $SL(N)$ dans E . On vérifie alors facilement que les fibres de γ ne sont pas toutes de même dimension (cf. chap. I § 3 lemme 4); par conséquent, $k[E]$ n'est pas un $k[E]^{SL(N)}$ -module libre (cf. [7] § 13).

- (a) $k[M]$ est un $k[M]^G$ -module libre;
- (b) les composantes isotypiques du G-module $k[M]$ sont
des $k[M]^G$ -modules libres de type fini;
- (c) pour tout G-module N , $\text{Mor}_G(M, N)$ est un $k[M]^G$ -modu-
le libre de type fini;
- (d) les G-modules $k[\tilde{\pi}(U)]$, $\} \in M/G$, sont isomorphes deux-
à-deux.

Preuve. On sait que les composantes isotypiques du G-module $k[M]$ sont des $k[M]^G$ -modules gradués de type fini (cf. [2] § 6 no 9) et que $k[M]$ est somme directe de ses composantes isotypiques. L'équivalence des conditions (a) et (b) est donc claire (un module gradué en degrés positifs projectif est libre - cf. [1] § 11 no 4).

Soit $N = \bigoplus_{i=1}^{\infty} N_i$ une décomposition du G-module N en somme directe de G-modules irréductibles. L'équivalence des conditions (b) et (c) provient facilement de l'égalité $\text{Mor}_G(M, N) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \text{Mor}_G(M, N_i)$ et du fait que $N_i \otimes \text{Hom}_G(N_i, k[M])$ est canoniquement isomorphe à la composante isotypique de type N_i de $k[M]$.

Soit P une composante isotypique du G-module $k[M]$, δ le type de P . Soit ζ un point de M/G et $\mathfrak{m}_\zeta$ l'idéal maximal de $k[M]^G$ correspondant. D'après le lemme 1, la composante isotypique de type δ du G-module $k[\tilde{\pi}(U)]$ est égale à $P \otimes_{k[M/G]} k[M/G]_{/\mathfrak{m}_\zeta}$. Ainsi, si P est un $k[M]^G$ -module libre de rang r , la dimension sur $k \simeq k[M/G]_{/\mathfrak{m}_\zeta}$ de la composante isotypique de type δ de $\tilde{\pi}(\zeta)$ est égale à r et est donc indépendante de $\zeta \in M/G$. La condition (b) implique donc la condition (d).

Il reste à démontrer que (d) implique (b). Pour simplifier, on

notera $J = k[M]^G$, J_+ l'idéal de J formé des éléments de degré > 0 et $J_{(0)}$ le corps des fractions de J . Soit P une composante isotypique de $k[M]$. Il est bien connu qu'il existe $\zeta \in M/G$ tel que $\dim_{J_{(0)}}(P \otimes_{J_{(0)}} J_{(0)}) = \dim_{J/\mathfrak{m}_\zeta}(P \otimes_{J/\mathfrak{m}_\zeta} J/\mathfrak{m}_\zeta)$. Puisque $P \otimes_{J/\mathfrak{m}_\zeta} J/\mathfrak{m}_\zeta$ est la composante isotypique de $\tilde{\pi}(\zeta)$ de même type que P , l'hypothèse (d) implique en particulier que $\dim_{J_{(0)}}(P \otimes_{J_{(0)}} J_{(0)}) = \dim_k(P \otimes_{J/J_+} J/J_+) = \dim_k(P/J_+P)$. Soit I un supplémentaire gradué de J_+P dans P , $u: I \otimes_k J \rightarrow P$ le J -homomorphisme obtenu à partir de l'inclusion de I dans P . Par construction u est surjectif (cf. [1] § 11 no 4); comme enfin $u \otimes_{J/J_{(0)}} 1_{J_{(0)}}: I \otimes_k J_{(0)} \rightarrow P \otimes_{J/J_{(0)}} J_{(0)}$ est un homomorphisme surjectif entre deux espaces vectoriels de même dimension (finie), $u \otimes_{J/J_{(0)}} 1_{J_{(0)}}$ est bijectif, d'où l'injectivité de u . On a donc prouvé que (d) implique (b).

Corollaire. - On suppose que $k[M]$ est un $k[M]^G$ -module libre et que l'orbite d'un point en position générale dans M est fermée et isomorphe à l'espace homogène G/K . Alors pour tout G -module N , $\text{Mor}_G(M, N)$ est un $k[M]^G$ -module libre de rang $\dim N^K$.

Preuve. D'après le lemme 1 et la proposition 2, $\text{Mor}_G(M, N)$ est un $k[M]^G$ -module libre de rang $\dim_k(\text{Mor}_G(\tilde{\pi}(\zeta), N))$, $\zeta \in M/G$. Or, d'après l'hypothèse, il existe $\zeta \in M/G$ tel que $\tilde{\pi}(\zeta)$ est G -isomorphe à G/K ; la conclusion provient donc de l'isomorphisme canonique entre $\text{Mor}_G(G/K, N)$ et N^K (cf. exemple 1).

Remarque 3. - Si G est semi-simple, on peut remplacer l'hypothèse "l'orbite d'un point en position générale dans M est fermée" par "l'isotropie d'un point en position générale dans M est réductive"

§ 2. Restriction de covariants.

Soit G un groupe algébrique réductif et M un G -module. On suppose que l'orbite d'un point en position générale dans M est fermée et isomorphe à l'espace homogène G/K . Dans ce paragraphe on met en relation l'ensemble des covariants (pour l'opération de G) de M à valeurs dans M avec l'ensemble des covariants (pour l'opération du normalisateur de K dans G) de M^K à valeurs dans M^K .

0.

Les conventions et notations sont celles du paragraphe précédent.

1.

Soit G un groupe algébrique réductif et M un G -module. Le morphisme $\pi : M \longrightarrow M/G$ est surjectif et chaque fibre de π contient exactement une orbite fermée de G dans M ; on notera $T(\xi)$ l'orbite fermée de G dans $\pi^{-1}(\xi)$, $\xi \in M/G$. De plus, il existe un ouvert non vide U de M/G tel que les fibres $\pi^{-1}(\xi)$, $\xi \in U$, sont G -isomorphes deux-à-deux (pour plus de précisions et de détails, voir [5] chap. III § 3).

On appelle sous-groupe de Cartan de G relatifs à M les sous-groupes d'isotropie G_x pour $x \in T(\xi)$, $\xi \in U$. Les sous-groupes de Cartan de G relatifs à M sont des sous-groupes réductifs de G conjugués deux-à-deux. Si K est un sous-groupe de Cartan de G relatif à M , on appelle groupe de Weyl (associé à K) le groupe

$W = N_G(K)/K$; le groupe W est réductif et opère dans M^K , le sous-espace de Cartan (associé à K).

Soit K un sous-groupe ^{de Cartan} $\wedge$ de G relatif à M . L'application de restriction $k[M] \rightarrow k[M^K]$ induit visiblement un homomorphisme

$$\rho : k[M]^G \longrightarrow k[M^K]^W.$$

Théorème 1. - L'homomorphisme $\rho : k[M]^G \longrightarrow k[M^K]^W$ est un isomorphisme.

La preuve de théorème se trouvera dans un article à paraître de D.Luna et R.W.Richardson.

Exemple 1. - On considère la représentation adjointe de G (supposé connexe) dans son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$; soit $\mathfrak{f}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et W ^{ℓ} le groupe de Weyl usuel relatif à $\mathfrak{f}$. Le théorème 1 redonne le résultat classique (Chevalley) : l'application de restriction $k[\mathfrak{g}] \rightarrow k[\mathfrak{f}]$ induit un isomorphisme $k[\mathfrak{g}]^G \rightarrow k[\mathfrak{f}]^W$.

2.

Dans ce numéro, on se donne un G -module M et un sous-groupe de Cartan K de G relatif à M . On note encore $W = N_G(K)/K$.

L'application de restriction $k[M] \rightarrow k[M^K]$ induit, pour tout G -module N , un homomorphisme

$$\rho_N : \text{Mor}_G(M, N) \longrightarrow \text{Mor}_{N_G(K)}(M^K, N) \cong \text{Mor}_W(M^K, N^K)$$

défini par $\rho_N(\gamma) = \gamma|_{M^K}$, $\gamma \in \text{Mor}_G(M, N)$, et un isomorphisme

$\rho : k[M]^G \longrightarrow k[M^K]^W$ (théorème 1). Les homomorphismes ρ_N sont donc $k[M]^G \cong k[M^K]^W$ -linéaires; ils sont de plus gradués de degré 0.

Remarque 1. - Si N est le G -module trivial de dimension 1, $\rho_N = \rho$.

Pour alléger l'écriture on identifie $k[M]^G$ et $k[M^K]^W$, on note

$J = k[M]^G = k[M^K]^W$ et $J_{(0)}$ le corps des quotients de J .

Théorème 2.- On suppose que l'orbite d'un point en position générale

le dans M est fermée. Alors, pour tout G -module N , $\int_N$
est injectif et $\int_N \otimes_J 1_{J_{(0)}} : \text{Mor}_G(M, N) \otimes_{J_{(0)}} \rightarrow \text{Mor}_W(M^K, N^K) \otimes_{J_{(0)}}$
est un isomorphisme.

Preuve. On prend un ouvert non vide U de M/G tel que les fibres $\pi_M^{-1}(\xi)$, $\xi \in U$, sont G -isomorphes deux-à-deux. D'après l'hypothèse, $\pi_M^{-1}(\xi)$, $\xi \in U$ est G -isomorphe à l'espace homogène G/K .

Soit $\gamma \in \text{Mor}_G(M, N)$ tel que $\gamma|_{M^K} = 0$; on a $\gamma|_{G \cdot M^K} = 0$ d'où $\gamma = 0$ puisque $G \cdot M^K$ contient l'ouvert $\pi_M^{-1}(U)$. L'homomorphisme $\int_N$ est donc injectif.

Pour démontrer que $\int_N \otimes_J 1_{J_{(0)}}$ est un isomorphisme, il reste à prouver que $\text{Mor}_G(M, N) \otimes_{J_{(0)}}$ et $\text{Mor}_W(M^K, N^K) \otimes_{J_{(0)}}$ sont de même dimension sur $J_{(0)}$. Or, pour tout $\xi \in U$, notant $\mathfrak{m}_\xi$ l'idéal maximal de J correspondant à ξ , on a

$$\begin{aligned} \text{Mor}_G(M, N) \otimes_{J/\mathfrak{m}_\xi} &\simeq \text{Mor}_G(\pi_M^{-1}(\xi), N) \simeq \text{Mor}_G(G/K, N) \simeq M^K \\ &\simeq \text{Mor}_{N_G(K)}(N_G(K)/K, N) \simeq \text{Mor}_W(\pi_{M^K}^{-1}(\xi), N^K) \simeq \text{Mor}_W(M^K, N^K) \otimes_{J/\mathfrak{m}_\xi} \end{aligned}$$

d'après le lemme 1, l'exemple 1 du § 1 et le fait que $\pi_{M^K}^{-1}(\xi) = \pi_M^{-1}(\xi) \cap M^K \simeq (G/K)^K \simeq N_G(K)/K = W$. Puisque pour tout J -module E de type fini,

il existe un ouvert non vide V du spectre maximal de J (i.e. de M/G)

tel que, pour tout $\xi \in V$ on ait $\dim_{J_{(0)}}(E \otimes_{J_{(0)}}) = \dim_{J/\mathfrak{m}_\xi}(E \otimes_{J/\mathfrak{m}_\xi})$,

les deux $J_{(0)}$ -espaces vectoriels considérés sont bien de même dimension (M/G est irréductible).

Exemple 2.- Soit $G = \text{SL}(N)$ où N est un espace vectoriel de dimension paire. On considère le G -module $M = \bigwedge^2 N \oplus N$. Il est facile de véri-

fier que l'orbite d'un point en position générale dans M n'est pas fermée, qu'un sous-groupe de Cartan $\overset{K}{\wedge}$ de G relatif à M est isomorphe à $Sp(N)$ et que M^K est de dimension 1 et contenu dans le sous-espace $\overset{2}{\wedge} N$ de M . On prend alors le covariant $\gamma : M \rightarrow \overset{3}{\wedge} N$ donné par $\gamma(\omega, \alpha) = \omega \wedge \alpha$; si la dimension de N est assez grande, γ n'est pas nul, tandis que $\gamma|_{H^K} = 0$.

Remarque 2. - Les homomorphismes ρ_N ne sont pas toujours surjectifs. On prend par exemple $G = SL(P)$ et $M = S^2(P)$ où P est un espace vectoriel de dimension 2. Le sous-groupe

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t' \end{pmatrix} \right\}$$

est un sous-groupe de Cartan de G relatif à M ; le groupe $N_G(K)$ est égal à

$$\left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t' \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t' \\ -t & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et $W = N_G(K)/K$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le W -module $(S^{2m}(P))^K$ est le W -module trivial (resp. non trivial) de dimension 1 si m est pair (resp. impair); par suite la composante homogène de degré 0 (resp. 1) de $\text{Mor}_W((S^2(P))^K, (S^{2m}(P))^K)$ est non nulle pour m pair (resp. impair). De l'autre côté, il est évident que les composantes homogènes de degré 0 et 1 de $\text{Mor}_G(S^2(P), S^{2m}(P))$ sont nulles pour $m \geq 2$. Les homomorphismes $\rho_{S^2(P)}$ ne sont donc pas surjectifs pour $m \geq 2$.

Théorème 3. - On suppose que

- (a) $k[M]$ est un $k[M]^G$ -module libre;
- (b) W est un groupe fini;
- (c) M possède une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et invariante par G .

Alors $\rho_M : \text{Mor}_G(M, M) \longrightarrow \text{Mor}_W(M^K, M^K)$ est un isomorphisme.

Remarque 3. - Les hypothèses du théorème 3 sont vérifiées par la représentation adjointe de G (supposé connexe) (cf. [4] p. 385). Kostant explicite encore dans [4] p. 396 la série de Poincaré du $k[\mathfrak{g}]^G$ -module gradué $\text{Mor}_G(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$; il resterait à faire un travail semblable pour l'opération du groupe de Weyl dans une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ pour obtenir le théorème dans ce cas particulier.

La représentation adjointe de G a souvent servi de modèle pour l'étude des G -modules M vérifiant (a) ; On pouvait se demander si l'affirmation du théorème 3 était encore vraie sous les seules hypothèses (a) et "l'orbite d'un point en position générale dans M est fermée", ; on donnera plus loin, au numéro 5 , un exemple qui montre qu'il n'en est rien.

La démonstration du théorème 3 repose sur la construction classique de covariants à partir d'invariants par "polarisation". On va donc aux numéros suivants décrire ce procédé, puis démontrer ce théorème.

3.

Dans ce numéro on utilisera systématiquement les notations que voici: H est un groupe algébrique réductif, N un H -module, N' le dual de N , S l'algèbre des fonctions polynomiales sur N , J la sous-algèbre S^G de S et E le J -module $\text{Mor}_H(N, N')$. De plus, on note J_n la composante homogène de degré n de J , $J_+ = \bigoplus_{n \geq 0} J_n$ et pour tout J -module F , $\text{gr}_{J_+}(F) = \bigoplus_{n \geq 0} J_+^n F / J_+^{n+1} F$.

On considère les deux J -modules J_+ et E . On dispose de deux applications entre J_+ et E : la polarisation p définie par

$$\begin{array}{ccc} p: J_+ & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & (x \mapsto df(x)) \end{array}$$

et la restitution r définie par

$$\begin{array}{ccc} r: E & \longrightarrow & J_+ \\ \gamma & \longmapsto & (x \mapsto \langle \gamma(x), x \rangle) \end{array}$$

où df désigne la différentielle extérieure de f et $\langle, \rangle$ la dualité naturelle $N' \times N \rightarrow k$.

Lemme 1. - (a) L'opérateur de polarisation p est un homomorphisme

k -linéaire gradué de degré -1 ; il est injectif et

on a $p(J_+^{n+1}) \subset J_+^n E$.

(b) L'opérateur de restitution r est un homomorphisme

J -linéaire gradué de degré $+1$.

(c) La restriction de rop à J_n est l'homothétie de rapport n .

Preuve. L'affirmation (a) résulte des propriétés de la différentiation extérieure; l'affirmation (b) est banale; quant à (c), elle n'est rien d'autre que la formule d'Euler pour les fonctions polynomiales homogènes.

Proposition 1. - L'homomorphisme p induit un homomorphisme injectif

$$\text{gr}_{J_+}(p): \text{gr}_{J_+}(J_+) \longrightarrow \text{gr}_{J_+}(E).$$

Preuve. L'existence de $\text{gr}_{J_+}(p)$ provient de l'affirmation (a) du lemme 1. Pour prouver que $\text{gr}_{J_+}(p)$ est injectif, il suffit de montrer que $p^{-1}(J_+^n E) = J_+^n J_+ = J_+^{n+1}$, $n \geq 0$. Soit donc $f \in J_+$ tel que $p(f) \in J_+^n E$; puisque tous les objets concernés sont gradués, on

peut supposer f homogène de $\overset{e}{\text{dgré}} 1$; on a $\text{rp}(f) \in J_+^n J_+ = J_+^{n+1}$ (lemme 1 (b)) d'une part et $\text{rp}(f) = \text{if}$ (lemme 1 (c)) d'autre part, ce qui démontre bien que $f \in J_+^{n+1}$.

Remarque 4.—Les opérateurs de polarisation ne sont pas surjectifs en général. En effet, si p était surjective, p induirait un isomorphisme $J_+/J_+^3 \longrightarrow E/J_+^2 E$ par exemple (cf. la preuve de la proposition 1); or, si J est un anneau de polynômes à n indéterminées et si E est un J -module libre de rang n , cas qui se produit par exemple pour la représentation adjointe d'un groupe réductif de rang n , on a $\dim_K(J_+/J_+^3) = n + \frac{1}{2}n(n+1)$ et $\dim_K(E/J_+^2 E) = n(n+1)$.

On désigne par K un sous-groupe de Cartan de H relatif à N et par W le groupe de Weyl correspondant.

Proposition 2.— On suppose que S est un J -module libre et que l'orbite d'un point en position générale dans N est fermée. Les conditions suivantes sont alors équivalentes:

- (a) W est un groupe fini;
- (b) $\dim_K(J_+/J_+^2) = \dim_K(E/J_+ E)$;
- (c) l'image de p contient un système de générateurs du J -module E .

Preuve. D'après la proposition 1, on a toujours $\dim_K(J_+/J_+^2) \leq \dim_K(E/J_+ E)$. Du fait que S est un J -module libre résulte que J est une algèbre de polynômes (proposition 1 § 1) et que E est un J -module libre (proposition 2 § 1). Si on suppose de plus que l'orbite d'un point en position générale dans N est fermée, on sait encore que le rang de E est égal à $\dim(N')^K = \dim N^K$ (corollaire

de la proposition 2, § 1). On a donc les inégalités

$$\dim_k [N^K]^W = \dim J = \dim_k (J_+/J_+^2) \leq \dim_k (E/J_+E) = \dim N^K.$$

Comme enfin l'orbite d'un point en position générale dans N^K est fermée et W -isomorphe à W (pour $\}$ en position générale dans N/H , $\pi_{N \times}^{-1}(\}) = \pi_N^{-1}(\}) \cap N^K \cong (H/K)^K \cong N_H(K)/K = W$), pour que $\dim_k [N^K]^W = \dim N^K$, il faut et il suffit que W soit un groupe fini. L'équivalence des conditions (a) et (b) est dès lors claire.

On vérifie facilement que pour que $\text{Im}(p)$ contienne un système de générateurs du J -module E , il faut et il suffit que

$\text{gr}_{J_+}^0(p): J_+/J_+^2 \longrightarrow E/J_+E$ soit surjectif (cf. [1] § 11 no 4). L'équivalence des conditions (b) et (c) provient donc de la proposition 1.

Corollaire.- En plus des hypothèses de la proposition 2, on suppose que N et N' sont H -isomorphes. Alors, si W est un groupe fini, N possède une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et invariante par H .

Preuve. D'après la proposition 2, par polarisation des éléments de J_+ on obtient un système de générateurs du J -module E ; en particulier, et pour des raisons de degré, tout H -isomorphisme $N \rightarrow N'$ est obtenu par polarisation d'un élément de J_2 , d'où la conclusion.

4.

On reprend les notations et conventions du numéro 2 .

Proposition 3.- On suppose que

- (a) $k[M]$ est un $k[M]^G$ -module libre;
- (b) W est un groupe fini;
- (c) l'orbite d'un point en position générale dans M est fermée.

Alors $\rho_{H'} : \text{Mor}_G(M, M') \longrightarrow \text{Mor}_W(M^K, (M')^K)$ est un isomorphisme.

Preuve. On sait déjà que $\rho_{H'}$ est injectif (théorème 2). On pose $M^K = N$, $W = H$ et on reprend les notations introduites au numéro 3 .

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Mor}_G(M, M') & \xrightarrow{\rho_{H'}} & E \\
 \uparrow p_H & & \uparrow \tau_H \\
 k[M]^G_+ & \xrightarrow[\rho]{\sim} & J_+
 \end{array}$$

où les p sont des opérateurs de polarisation et les flèches horizontales représentent des morphismes de restriction. Puisque $\rho_{H'}$ est un $k[M]^G \cong J$ -homomorphisme, pour démontrer que $\rho_{H'}$ est surjectif, il suffit de prouver que l'image de p_H contient un système de générateurs du J -module E .

D'après (a) , J est une algèbre de polynômes; ainsi, d'après [3] chap. V § 5 no 5 , puisque H est un groupe fini (b), S est un J -module libre. Les hypothèses de la proposition 2 sont donc vérifiées par le H -module N (██████); il résulte alors de la proposition 2 que p_H contient un système de générateurs du J -module E , ce qui achève la démonstration.

Preuve du théorème 3. De l'hypothèse (c) résulte que M est G -isomorphe à M' et que l'orbite d'un point en position générale dans M est fermée (cf. [5] chap. III no 3). Le théorème 3 est alors une conséquence immédiate de la proposition 3 .

Remarque 5.- On peut remplacer l'hypothèse (c) du théorème 3 par les hypothèses "l'orbite d'un point en position générale dans M est fermée et M et M' sont G -isomorphes" (cf. corollaire de la proposition 2).

5.

Dans ce numéro, on montre qu'il existe un groupe réductif H et un H -module E tels que

- (1) $k[E]$ est un $k[E]^H$ -module libre,
- (2) l'orbite d'un point en position générale dans E est fermée,
- (3) l'homomorphisme $\int_E : \text{Mor}_H(E, E) \longrightarrow \text{Mor}_W(E^K, E^K)$ n'est pas surjectif,

K désignant un sous-groupe de Cartan de H relatif à E et $W = N_H(K)/K$ le groupe de Weyl correspondant.

Pour construire un tel exemple, on va utiliser le procédé "d'extension par SL " du chap. II no 5 .

Soit P un espace vectoriel de dimension 2 . On considère une représentation $\delta : k^* \longrightarrow SL(P)$ associée aux caractères $t \mapsto t$ et $t \mapsto t^{-1}$ de k^* . On fait alors opérer le groupe $G = SL(P) \rtimes k^*$ dans l'espace vectoriel $M = \text{Hom}(P, P)$ par $(s, t).x = s \circ x \circ \delta(t)^{-1}$, $s \in SL(P)$, $x \in M$, $t \in k^*$. L'orbite par G de $x = 1_P$ (où 1_P est l'application identique de P) est

fermée et de codimension 1 dans M ; l'algèbre $k[M]^G$ est donc une algèbre de polynômes à une indéterminée (engendrée par le déterminant sur M) et le sous-groupe d'isotropie T de $x = 1_p$ est un sous-groupe de Cartan de G relatif à M ; le sous-groupe T est isomorphe à k^* et le T -module M se décompose en $M^T \oplus M_2 \oplus M_{-2}$ où M_1 est le T -module de dimension 1 associé au caractère $t \mapsto t^1$. Le normalisateur de T dans G , qui est égal au centralisateur de T dans G , est un tore maximal de G ; on a donc $N_G(T)/T \cong k^*$. Enfin, le groupe T opère dans le sous-espace $\bar{M}$ de M formé des homomorphismes de trace nulle ; le centralisateur de T dans le groupe $SL(\bar{M})$ est isomorphe à $(k^*)^2$.

Soit N un espace vectoriel de dimension 3 ; on considère le groupe $H = G \times SL(N)$ (i.e. $H \cong SL(2) \times k^* \times SL(3)$) et le H -module $E = \text{Hom}(M, N)$. Puisque le groupe G opère dans M comme sous-groupe de $SL(M)$, on peut utiliser les propositions 10, 11 et 12 chap. II no 5 : soit α un élément de E de rang maximum et dont le noyau contient le point 1_p de M ; l'orbite par H de α est fermée et de codimension 1 dans E ; le sous-groupe d'isotropie K de α est un sous-groupe de Cartan de H relatif à E et est isomorphe à k^* ; d'après la description du T -module M donnée plus haut, le sous-espace E^K est de dimension 4 ; on a enfin la suite exacte

$$1 \longrightarrow Z_{SL(\bar{M})}(T) \longrightarrow N_H(K)/K \longrightarrow N_G(T)/T \longrightarrow 1$$

d'où résulte que $W = N_H(K)/K$ est isomorphe à $(k^*)^3$.

La composante homogène de degré 1 de $\text{Mor}_W(E^K, E^K)$ est de dimension ≥ 4 : en effet, le W -module E^K se décompose en somme directe de 4 sous-modules irréductibles de dimension 1 et les 4 projections

correspondant à cette décomposition commutent aux opérations de W et sont linéairement indépendantes. [En fait, puisque $k[M]^G \simeq k[E]^H \simeq k[E^K]^W$ (corollaire de la proposition 7 chap. II et théorème 1), $k[E^K]^W$ est une algèbre de polynômes à une indéterminée et le $k[E^K]^W$ -module $\text{Mor}_W(E^K, E^K)$ est libre de rang 4 (corollaire de la proposition 2 § 1) : la composante homogène de degré 1 de $\text{Mor}_W(E^K, E^K)$ est donc exactement de dimension 4 et engendre $\text{Mor}_W(E^K, E^K)$.]

De l'autre côté, le $G = SL(P) \rtimes k^*$ -module M est isomorphe à $P \otimes D_1 \oplus P \otimes D_{-1}$ où D_1 est le k^* -module de dimension 1 associé au caractère $t \mapsto t^1$; le $H = SL(P) \rtimes k^* \rtimes SL(N)$ -module E est donc somme directe des deux H -modules irréductibles non isomorphes $\text{Hom}(P \otimes D_1, N)$ et $\text{Hom}(P \otimes D_{-1}, N)$. Ainsi la composante homogène de degré 1 de $\text{Mor}_G(E, E)$ est de dimension 2. Le morphisme ρ_E (qui est gradué de degré 0) n'est donc pas surjectif.

Pour voir que le H -module E construit ci-dessus fournit l'exemple demandé, il reste encore à montrer que $k[E]$ est un $k[E]^H$ -module libre: cela provient de l'isomorphisme $k[M]^G \rightarrow k[E]^H$ (corollaire de la proposition 7 chap. II) et du fait que $k[M]^G$ est une algèbre de polynômes à une indéterminée.

Remarque 6.- Il va sans dire qu'avec un peu de courage, on peut traiter l'exemple ci-dessus indépendamment des résultats du chap. II.

1. Bourbaki N.: Algèbre, chap. 2 , Hermann 1967 .
2. Bourbaki N.: Groupes et algèbres de Lie, chap. 1 , Hermann 1960 .
3. Bourbaki N.: Groupes et algèbres de Lie, chap. 4, 5 et 6 ,
Hermann 1968 .
4. Kostant B.: Lie group representations on polynomial rings,
Amer. J. Math. vol. 86, 327-402 (1963).
5. Luna D.: Slices étales, Bull. Soc. math. France, Mémoire 33,
81-105 (1973).
6. Luna D., Vust Th.: Un théorème sur les orbites affines des
groupes algébriques semi-simples, Ann. Scuola Nor. Sup. Pisa ,
vol. 27, no 3, 527-535 (1973).
7. Matsumura H.: Commutative algebra, Benjamin 1970 .
8. Popov V.L.: Stability criteria for the action of a semi-simple
group on a factorial manifold, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.
Tom 34 no 3 (1970); English transl. Math. USSR-Izvestija,
vol. 4 no 3, 527-535 (1970).
9. Vust Th.: Opération de groupes réductifs dans un type de cônes
presque homogènes (à paraître).

